Quadratic Equation over Associative D-Algebra

Aleks Kleyn

ABSTRACT. In this paper, I treat quadratic equation over associative D-algebra. In quaternion algebra H, the equation $x^2 = a$ has either 2 roots, or infinitely many roots. Since $a \in R$, $a < 0$, then the equation has infinitely many roots. Otherwise, the equation has roots x_1, x_2, $x_2 = -x_1$. I considered different forms of the Viéte's theorem and a possibility to apply the method of completing the square.

In quaternion algebra, there exists quadratic equation which either has 1 root, or has no roots.

Contents

1. Preface . . . 1
1.1. Preface to Version 1 . . . 1
1.2. Preface to Version 2 . . . 2
2. Preliminary Definitions . . . 4
2.1. Universal Algebra . . . 4
2.2. Representation of Universal Algebra . . . 5
2.3. Module over Commutative Ring . . . 7
2.4. Algebra over Commutative Ring . . . 9
2.5. Algebra with Conjugation . . . 13
2.6. Polynomial over Associative D-Algebra . . . 14
2.7. Quaternion Algebra . . . 15
3. Simple Examples . . . 16
4. Square Root . . . 17
5. Algebra with Conjugation . . . 20
6. Few Remarks . . . 24
7. Questions and Answers . . . 25
8. References . . . 28
9. Index . . . 30
10. Special Symbols and Notations . . . 31

1. Preface

1.1. **Preface to Version 1.** Many years ago during algebra lessons at seventh grade, my teacher taught me how to solve quadratic equations. It was not difficult. Although it took me a long time to remember the formula, the simple idea to solve

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/ http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
http://sites.google.com/site/AleksKleyn/ http://AleksKleyn.blogspot.com/.

the equation by completing the square always allowed me to complete the required calculations.

In spite of its apparent simplicity, every time I learned something new I felt the thrill of discovery. The memory of this sense has been dulled by stronger experiences as years have gone by. But our fate is unpredictable and sometimes likes to play a joke on us. I go back to school. I again learn to solve quadratic equations; I again learn standard algebraic identities.

It is not important that I study noncommutative algebra instead of real numbers. My memory is leading me on a well known path, and I trust it. Somewhere, after the next turn, I will meet the thrill of new discovery once again.

June, 2015

1.2. **Preface to Version 2.** Shortly after the publication of the paper, I found the answer for the question 7.1 in the paper [9]. In this paper, authors consider equation which has form

$$xp_0x^* + xQ + Rx^* = S \tag{1.1}$$

where Q, R, S are H-numbers and $p_0 \in R$. Since

$$x^* = -\frac{1}{2}(x + ixi + jxj + kxk)$$

in quaternion algebra, then the equation (1.1) gets form

$$\begin{aligned} &p_0x^2 - \frac{p_0}{2}xixi - \frac{p_0}{2}xjxj - \frac{p_0}{2}xkxk \\ &+ xQ - \frac{R}{2}x - \frac{R}{2}ixi - \frac{R}{2}jxj - \frac{R}{2}kxk = S \end{aligned} \tag{1.2}$$

In the paper [9], there is complete analisys of solutions of the equation (1.1) (the theorem [9]-2 on the page 7).

However, I was confused by case 2, when the equation have one root or no one. According to the proof, we get unique root. However, the multiplicity of the root should be 2, since this is root of quadratic equation. So I decided to clarify this case for me by particular example. I chose the coefficients

$$Q = 4i \quad R = -4j \quad p_0 = 8$$

In this case, the equation (1.1) has form

$$x8x^* + 4xi - 4jx^* = -1 - 2k \tag{1.3}$$

and has unique root

$$x = -\frac{Q^* + R}{2p_0} = -\frac{-4i - 4j}{2\ 8} = \frac{1}{4}(i + j) \tag{1.4}$$

Since equations (1.1), (1.2) are equivalent, then the equation (1.3) has form

$$p(x) = 0 \tag{1.5}$$

where polynomial $p(x)$ has form

$$\begin{aligned} p(x) &= (-4 \otimes 1 \otimes 1 - 4 \otimes i \otimes i - 4 \otimes j \otimes j - 4 \otimes k \otimes k) \circ x^2 \\ &+ (4 \otimes i + 2j \otimes 1 - 2k \otimes i - 2 \otimes j + 2i \otimes k) \circ x + 1 + 2k \\ &= (-4x^2 - 4xixi - 4xjxj - 4xkxk \\ &+ 4xi + 2jx - 2kxi - 2xj + 2ixk + 1 + 2k \end{aligned} \tag{1.6}$$

Since (1.4) is root of the equation (1.5), then the polynomial

$$q(x)=x-\frac{1}{4}(i+j) \tag{1.7}$$

is divisor of the polynomial $p(x)$. Applying division algorithm considered in the theorem 2.53, we get

$$\begin{aligned} p(x)=&-4q(x)(x+ixi+jxj+kxk-i)\\ &+q(x)(i-j)-iq(x)(1-k)+jq(x)(k+1)-kq(x)(j+i)\end{aligned} \tag{1.8}$$

The expression (1.8) does not answer my question. So I leave the question 7.1 open.

It is an interesting twist. The main point of this paper was to show that some ideas may simplify research in noncommutative algebra. At the same time, This article raises questions about the effectiveness of division algorithm considered in the theorem 2.53. This is good. To solve a problem, we need to see this problem.

Nevertheless, consider result of the division in details.

$$\begin{aligned} p(x)=&(-4\otimes(x+ixi+jxj+kxk-i)\\ &+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i))\circ q(x)\end{aligned} \tag{1.9}$$

Quotient is tensor

$$\begin{aligned} s(x)=&-4\otimes(x+ixi+jxj+kxk-i)\\ &+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i)\end{aligned}$$

which linearly depends from x. According to the theorem [9]-2 on the page 7, the value of x different from value (1.4) is not a root of the tensor $s(x)$. From the equation

$$\begin{aligned} s(\frac{1}{4}(i+j))=&\,2\otimes(-i-j)+4\otimes i\\ &+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i)\\ &=-2\otimes i-2\otimes j+4\otimes i\\ &+1\otimes i-1\otimes j-i\otimes 1+i\otimes k+j\otimes k+j\otimes 1-k\otimes j-k\otimes i\\ &=-3\otimes j+3\otimes i\\ &-i\otimes 1+i\otimes k+j\otimes k+j\otimes 1-k\otimes j-k\otimes i\end{aligned}$$

it follows that the value of x (1.4) is not a root of the tensor $s(x)$.

To better understand construction which we considered here, consider the polynomial with known roots, for instance,

$$p(x)=2(x-i)(x-j)+(x-j)(x-i)=3x^2-2ix-2xj-jx-xi+k$$

and divide this polynomial over the polynomial

$$r(x)=x-i$$

Applying division algorithm considered in the theorem 2.53, we get

$$\begin{aligned} p(x)&=3(r(x)+i)x-2ix-2xj-jx-xi+k\\ &=3r(x)x+ix-2xj-jx-xi+k\\ &=3r(x)x+i(r(x)+i)-2(r(x)+i)j-j(r(x)+i)-(r(x)+i)i+k\\ &=3r(x)x+ir(x)-2r(x)j-jr(x)-r(x)i\\ &=(3\otimes x+i\otimes 1-2\otimes j-j\otimes 1-1\otimes i)\circ r(x)\end{aligned}$$

Therefore, quotient of polynomial $p(x)$ divided by polynomial $r(x)$ is the tensor

$$s(x)=3\otimes x+i\otimes 1-2\otimes j-j\otimes 1-1\otimes i$$

It is evident that

$$s(j)=1\otimes(j-i)-(j-i)\otimes 1\neq 0\otimes 0$$

However

$$s(j)\circ r(j)=0$$

It is evident that this method does not work in case of multiple root.

I am not yet ready to consider the division of the polynomial (1.6) by polynomial of power 2. Based on the equality (1.6), we may assume that divisor has form

$$\begin{aligned}r(x)=&-\frac{1}{4}(4x-i-j)(4x-i-j)-\frac{1}{4}(4x-i-j)i(4x-i-j)i\\&-\frac{1}{4}(4x-i-j)j(4x-i-j)j-\frac{1}{4}(4x-i-j)k(4x-i-j)k\end{aligned}$$

However, it is evident that $r(x)\in R$ for any x. This consideration finaly convinced me that the theorem [9]-2 on the page 7 is true.

January, 2016

2. Preliminary Definitions

2.1. Universal Algebra.

Definition 2.1. *For any sets*[1] A, B, **Cartesian power** B^A *is the set of maps*

$$f:A\to B$$

□

Definition 2.2. *For any* $n\geq 0$, *a map*[2]

$$\omega:A^n\to A$$

is called n**-ary operation on set** A *or just* **operation on set** A. *For any* a_1, ..., $a_n\in A$, *we use either notation* $\omega(a_1,...,a_n)$, $a_1...a_n\omega$ *to denote image of map* ω. □

Remark 2.3. *According to definitions 2.1, 2.2, n-ari operation* $\omega\in A^{A^n}$. □

Definition 2.4. *An* **operator domain** *is the set of operators*[3] Ω *with a map*

$$a:\Omega\to N$$

If $\omega\in\Omega$, *then* $a(\omega)$ *is called the* **arity** *of operator* ω. *If* $a(\omega)=n$, *then operator* ω *is called* n*-ary. We use notation*

$$\Omega(n)=\{\omega\in\Omega:a(\omega)=n\}$$

for the set of n*-ary operators.* □

[1] I follow the definition from the example (iv) on the page [11]-5.
[2] Definition 2.2 follows the definition in the example (vi) on the page page [11]-13.
[3] I follow the definition (1), page [11]-48.

Definition 2.5. *Let A be a set. Let Ω be an operator domain.*[4] *The family of maps*

$$\Omega(n) \to A^{A^n} \quad n \in N$$

is called Ω-algebra structure on A. The set A with Ω-algebra structure is called **Ω-algebra** A_Ω *or* **universal algebra**. *The set A is called* **carrier of Ω-algebra**. □

The operator domain Ω describes a set of Ω-algebras. An element of the set Ω is called operator, because an operation assumes certain set. According to the remark 2.3 and the definition 2.5, for each operator $\omega \in \Omega(2)$ n-ary operation ω on A is associated.

Definition 2.6. *Let A, B be Ω-algebras and $\omega \in \Omega(n)$. The map*[5]

$$f : A \to B$$

is compatible with operation ω, if, for all $a_1, ..., a_n \in A$,

$$f(a_1)...f(a_n)\omega = f(a_1...a_n\omega) \tag{2.1}$$

The map f is called **homomorphism** *from Ω-algebra A to Ω-algebra B, if f is compatible with each $\omega \in \Omega$.* □

Definition 2.7. *A homomorphism in which source and target are the same algebra is called* **endomorphism**. □

2.2. **Representation of Universal Algebra.**

Definition 2.8. *Let the set A be Ω-algebra. Endomorphism $t \in \mathrm{End}(\Omega; A)$ is called* **transformation of universal algebra** A. □

Definition 2.9. *Let the set A_2 be Ω_2-algebra. Let the set of transformations $\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$ be Ω_1-algebra. The homomorphism*

$$f : A_1 \to \mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$$

of Ω_1-algebra A_1 into Ω_1-algebra $\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$ is called **representation of Ω_1-algebra A_1** *or* **A_1-representation** *in Ω_2-algebra A_2.* □

We also use notation

$$f : A_1 \xrightarrow{*} A_2$$

to denote the representation of Ω_1-algebra A_1 in Ω_2-algebra A_2.

Definition 2.10. *Let the map*

$$f : A_1 \to \mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$$

be an isomorphism of the Ω_1-algebra A_1 into $\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$. Then the representation

$$f : A_1 \xrightarrow{*} A_2$$

of the Ω_1-algebra A_1 is called **effective**.[6] □

---

[4] I follow the definition (2), page [11]-48.

[5] I follow the definition on page [11]-49.

[6] See similar definition of effective representation of group in [16], page 16, [17], page 111, [12], page 51 (Cohn calls such representation faithful).

Definition 2.11. *Let*

$$f : A_1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!*\;\;\;\; A_2$$

be representation of Ω_1*-algebra* A_1 *in* Ω_2*-algebra* A_2 *and*

$$g : B_1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!*\;\;\;\; B_2$$

be representation of Ω_1*-algebra* B_1 *in* Ω_2*-algebra* B_2*. For* $i = 1, 2$*, let the map*

$$r_i : A_i \to B_i$$

be homomorphism of Ω_j*-algebra. The matrix of maps* $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *such, that*

$$r_2 \circ f(a) = g(r_1(a)) \circ r_2 \tag{2.2}$$

is called **morphism of representations from** f **into** g*. We also say that* **morphism of representations of** Ω_1**-algebra in** Ω_2**-algebra** *is defined.* □

Remark 2.12. *We may consider a pair of maps* r_1, r_2 *as map*

$$F : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$$

such that

$$F(A_1) = B_1 \qquad F(A_2) = B_2$$

Therefore, hereinafter the matrix of maps $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *also is called map.* □

Definition 2.13. *If representation* f *and* g *coincide, then morphism of representations* $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *is called* **morphism of representation** f*.* □

Definition 2.14. *Let*

$$f : A_1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!*\;\;\;\; A_2$$

be representation of Ω_1*-algebra* A_1 *in* Ω_2*-algebra* A_2 *and*

$$g : A_1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!*\;\;\;\; B_2$$

be representation of Ω_1*-algebra* A_1 *in* Ω_2*-algebra* B_2*. Let*

$$\Big(\mathrm{id} : A_1 \to A_1 \quad r_2 : A_2 \to B_2\Big)$$

be morphism of representations. In this case we identify morphism of (id, R) *representations of* Ω_1*-algebra and corresponding homomorphism* R *of* Ω_2*-algebra and the homomorphism* R *is called* **reduced morphism of representations***. We will use diagram*

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "f(a)"'] & B_2 \arrow[d, "g(a)"] \\
 & A_2 \arrow[r, "r_2"'] & B_2 \\
A_1 \arrow[ru, Rightarrow, "f"] \arrow[rruu, Rightarrow, "g"'] & &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

to represent reduced morphism R *of representations of* Ω_1*-algebra. From diagram it follows*

$$r_2 \circ f(a) = g(a) \circ r_2 \tag{2.4}$$

We also use diagram

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[rr, "r_2"] & & B_2 \\
& A_1 \arrow[ul, "f", "*"'] \arrow[ur, "g"', "*"] &
\end{tikzcd}$$

instead of diagram (2.3). □

2.3. **Module over Commutative Ring.**

Definition 2.15. *Let commutative ring D has unit 1. Effective representation*

$$f : D \xrightarrow{*} V \qquad f(d) : v \to d\,v \tag{2.5}$$

of ring D in an Abelian group V is called **module over ring D** *or* **D-module**. *Effective representation* (2.5) *of commutative ring D in an Abelian group V is called* **vector space over field D** *or* **D-vector space**. □

Theorem 2.16. *Following conditions hold for D-module:*

- **associative law**

$$(ab)m = a(bm) \tag{2.6}$$

- **distributive law**

$$a(m+n) = am + an \tag{2.7}$$

$$(a+b)m = am + bm \tag{2.8}$$

- **unitarity law**

$$1m = m \tag{2.9}$$

for any $a,\ b \in D,\ m,\ n \in V$.

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-4.1.3. □

Definition 2.17. *Let A_1, A_2 be D-modules. Reduced morphism of representations*

$$f : A_1 \to A_2$$

of D-module A_1 into D-module A_2 is called **linear map** *of D-module A_1 into D-module A_2. Let us denote* $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ *set of linear maps of D-module A_1 into D-module A_2.* □

Theorem 2.18. *Linear map*

$$f : A_1 \to A_2$$

of D-module A_1 into D-module A_2 satisfies to equations[7]

$$f \circ (a+b) = f \circ a + f \circ b \tag{2.10}$$

$$f \circ (pa) = p(f \circ a) \tag{2.11}$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-4.2.2. □

[7] In some books (for instance, [1], p. 119) the theorem 2.18 is considered as a definition.

Definition 2.19. *Let D be the commutative ring. Let A_1, ..., A_n, S be D-modules. We call map*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to S$$

polylinear map *of modules A_1, ..., A_n into module S, if*

$$f \circ (a_1, ..., a_i + b_i, ..., a_n) = f \circ (a_1, ..., a_i, ..., a_n) + f \circ (a_1, ..., b_i, ..., a_n)$$
$$f \circ (a_1, ..., pa_i, ..., a_n) = pf \circ (a_1, ..., a_i, ..., a_n)$$

$$1 \le i \le n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

□

Definition 2.20. *Let A_1, ..., A_n be free modules over commutative ring D.*[8] *Consider category $\mathcal{A}_1$ whose objects are polylinear maps*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \longrightarrow S_1 \qquad g : A_1 \times ... \times A_n \longrightarrow S_2$$

where S_1, S_2 are modules over ring D, We define morphism

$$f \to g$$

to be linear map

$$h : S_1 \to S_2$$

making following diagram commutative

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dd, "h"] \\ A_1 \times ... \times A_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & S_2 \end{tikzcd}$$

Universal object $A_1 \otimes ... \otimes A_n$ of category $\mathcal{A}_1$ is called **tensor product** *of modules A_1, ..., A_n.* □

Theorem 2.21. *Let D be the commutative ring. Let A_1, ..., A_n be D-modules. Tensor product is distributive over sum*

$$\begin{aligned} & a_1 \otimes ... \otimes (a_i + b_i) \otimes ... \otimes a_n \\ = & a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes ... \otimes a_n + a_1 \otimes ... \otimes b_i \otimes ... \otimes a_n \\ & a_i, b_i \in A_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

The representation of the ring D in tensor product is defined by equation

$$\begin{aligned} & a_1 \otimes ... \otimes (ca_i) \otimes ... \otimes a_n = c(a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes ... \otimes a_n) \\ & a_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned} \tag{2.13}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-4.4.3. □

[8] I give definition of tensor product of D-modules following to definition in [1], p. 601 - 603.

Theorem 2.22. *Let A_1, ..., A_n be modules over commutative ring D. Tensor product*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to A_1 \otimes ... \otimes A_n$$

exists and unique. We use notation

$$f \circ (a_1, ..., a_n) = a_1 \otimes ... \otimes a_n$$

for image of the map f. Let

$$g : A_1 \times ... \times A_n \to V$$

be polylinear map into D-module V. There exists a linear map

$$h : A_1 \otimes ... \otimes A_n \to V$$

such that the diagram

$$\begin{tikzcd} & A_1 \otimes ... \otimes A_n \arrow[dd, "h"] \\ A_1 \times ... \times A_n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & V \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

is commutative. The map h is defined by the equation

$$h \circ (a_1 \otimes ... \otimes a_n) = g \circ (a_1, ..., a_n) \tag{2.15}$$

Proof. See the proof of theorems [7]-4.4.2, [7]-4.4.4. □

2.4. Algebra over Commutative Ring.

Definition 2.23. *Let D be commutative ring. D-module A_1 is called* **algebra over ring** *D or D***-algebra***, if we defined product*[9] *in A_1*

$$v\, w = C \circ (v, w) \tag{2.16}$$

where C is bilinear map

$$C : A \times A \to A$$

If A_1 is free D-module, then A_1 is called **free algebra over ring** *D.* □

Theorem 2.24. *The multiplication in the algebra A_1 is distributive over addition.*

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-5.1.2. □

Convention 2.25. *Element of D-algebra A is called A***-number***. For instance, complex number is also called C-number, and quaternion is called H-number.* □

The multiplication in algebra can be neither commutative nor associative. Following definitions are based on definitions given in [18], page 13.

[9] I follow the definition given in [18], p. 1, [10], p. 4. The statement which is true for any D-module, is true also for D-algebra.

Definition 2.26. *The* **commutator**

$$[a,b]=ab-ba$$

measures commutativity in D-algebra A_1. D-algebra A_1 is called **commutative**, *if*

$$[a,b]=0$$

□

Definition 2.27. *The* **associator**

$$(a,b,c)=(ab)c-a(bc) \tag{2.17}$$

measures associativity in D-algebra A_1. D-algebra A_1 is called **associative**, *if*

$$(a,b,c)=0$$

□

Definition 2.28. *The set*[10]

$$N(A)=\{a\in A:\forall b,c\in A,(a,b,c)=(b,a,c)=(b,c,a)=0\}$$

is called the **nucleus of an D-algebra** A_1. □

Definition 2.29. *The set*[11]

$$Z(A)=\{a\in A:a\in N(A),\forall b\in A,ab=ba\}$$

is called the **center of an D-algebra** A_1. □

Convention 2.30. *Let A be free algebra with finite or countable basis. Considering expansion of element of algebra A relative basis $\overline{\overline{e}}$ we use the same root letter to denote this element and its coordinates. In expression a^2, it is not clear whether this is component of expansion of element a relative basis, or this is operation $a^2=aa$. To make text clearer we use separate color for index of element of algebra. For instance,*

$$a=a^ie_i$$

□

Let $\overline{\overline{e}}$ be the basis of free algebra A_1 over ring D. If algebra A_1 has unit, then we assume that e_0 is the unit of algebra A_1.

Theorem 2.31. *Let $\overline{\overline{e}}$ be the basis of free algebra A_1 over ring D. Let*

$$a=a^ie_i\quad b=b^ie_i\quad a,b\in A$$

We can get the product of a, b according to rule

$$(ab)^k=C_{ij}^ka^ib^j \tag{2.18}$$

where C_{ij}^k are **structural constants** *of algebra A_1 over ring D. The product of basis vectors in the algebra A_1 is defined according to rule*

$$e_ie_j=C_{ij}^ke_k \tag{2.19}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-5.1.9. □

---

[10] The definition is based on the similar definition in [18], p. 13

[11] The definition is based on the similar definition in [18], p. 14

Definition 2.32. *Let A_1 and A_2 be algebras over ring D. The linear map of the D-module A_1 into the D-module A_2 is called* **linear map** *of D-algebra A_1 into D-algebra A_2. Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ set of linear maps of D-algebra A_1 into D-algebra A_2.* □

Definition 2.33. *Let A_1, ..., A_n, S be D-algebras. Polylinear map*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to S$$

of D-modules A_1, ..., A_n into D-module S is called **polylinear map** *of D-algebras A_1, ..., A_n into D-algebra S. Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1, ..., A_n; S)$ set of polylinear maps of D-algebras A_1, ..., A_n into D-algebra S. Let us denote $\mathcal{L}(D; A^n; S)$ set of n-linear maps of D-algebra A_1 ($A_1 = ... = A_n = A_1$) into D-algebra S.* □

Theorem 2.34. *Tensor product $A_1 \otimes ... \otimes A_n$ of D-algebras A_1, ..., A_n is D-algebra.*

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-6.1.3. □

Theorem 2.35. *Let A_1 be associative D-algebra. The representation*

$$h : A \otimes A \longrightarrow\!\!\!\!\!*\!\!> \mathcal{L}(D; A; A) \qquad h(p) : f \to p \circ f \tag{2.20}$$

of D-module $A_1 \otimes A_1$ is defined by the equation

$$(a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A; A) \tag{2.21}$$

The representation (2.20) generates product $\circ$ in D-module $A_1 \otimes A_1$ according to rule

$$(p \circ q) \circ a = p \circ (q \circ a)$$

$$(p_0 \otimes p_1) \circ (q_0 \otimes q_1) = (p_0 q_0) \otimes (q_1 p_1) \tag{2.22}$$

The representation (2.20) of algebra $A_1 \otimes A_1$ in module $\mathcal{L}(D; A; A)$ allows us to identify tensor $d \in A_1 \otimes A_1$ and linear map $d \circ \delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$ where $\delta \in \mathcal{L}(D; A; A)$ is identity map. Linear map generated by tensor $a \otimes b \in A_1 \otimes A_1$ has form

$$(a \otimes b) \circ c = acb \tag{2.23}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-6.3.4. □

Convention 2.36. *I assume sum over index i in expression like*

$$a_{i \cdot 0} x a_{i \cdot 1}$$

□

Theorem 2.37. *Consider D-algebra A_1 and associative D-algebra A_2. Consider the representation of algebra $A_2 \otimes A_2$ in the module $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$. The map*

$$h : A_1 \to A_2$$

generated by the map

$$f : A_1 \to A_2$$

has form

$$h = (a_{s \cdot 0} \otimes a_{s \cdot 1}) \circ f = a_{s \cdot 0} f a_{s \cdot 1} \tag{2.24}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-6.3.6. □

Theorem 2.38. *Let A_1 be algebra over the ring D. Let A_2 be free finite dimensional associative algebra over the ring D. Let $\overline{\overline{e}}$ be basis of the algebra A_2 over the ring D. The map*

$$g = a \circ f \tag{2.25}$$

generated by the map $f \in \mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ through the tensor $a \in A_2 \otimes A_2$, has the standard representation

$$g = a^{ij}(e_i \otimes e_j) \circ f = a^{ij} e_i f e_j \tag{2.26}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-6.4.1. □

Convention 2.39. *In the equation*

$$\begin{aligned} &((a_0, ..., a_n, \sigma) \circ (f_1, ..., f_n)) \circ (x_1, ..., x_n) \\ =& (a_0 \sigma(f_1) a_1 ... a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, ..., x_n) \\ =& a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 ... a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \end{aligned} \tag{2.27}$$

as well as in other expressions of polylinear map, we have convention that map f_i has variable x_i as argument. □

Theorem 2.40. *Let A be associative D-algebra. Polylinear map*

$$f : A^n \to A, a = f \circ (a_1, ..., a_n) \tag{2.28}$$

generated by maps $I_{s \cdot 1}$, ..., $I_{s \cdot n} \in \mathcal{L}(D; A; A)$ has form

$$a = f^n_{s \cdot 0}\ \sigma_s(I_{s \cdot 1} \circ a_1)\ f^n_{s \cdot 1}\ ...\ \sigma_s(I_{s \cdot n} \circ a_n)\ f^n_{s \cdot n} \tag{2.29}$$

where σ_s is a transposition of set of variables $\{a_1, ..., a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \\ \sigma_s(a_1) & ... & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [7]-6.6.6. □

Convention 2.41. *Since the tensor $a \in A^{\otimes(n+1)}$ has the expansion*

$$a = a_{i \cdot 0} \otimes a_{i \cdot 1} \otimes ... \otimes a_{i \cdot n} \quad i \in I$$

then set of permutations $\sigma = \{\sigma_i \in S(n) : i \in I\}$ and tensor a generate the map

$$(a, \sigma) : A^{\times n} \to A$$

defined by rule

$$\begin{aligned} (a, \sigma) \circ (b_1, ..., b_n) &= (a_{i \cdot 0} \otimes a_{i \cdot 1} \otimes ... \otimes a_{i \cdot n}, \sigma_i) \circ (b_1, ..., b_n) \\ &= a_{i \cdot 0} \sigma_i(b_1) a_{i \cdot 1} ... \sigma_i(b_n) a_{i \cdot n} \end{aligned}$$

□

2.5. **Algebra with Conjugation.** Let D be commutative ring. Let A be D-algebra with unit e, $A \ne D$.

Let there exist subalgebra F of algebra A such that $F \ne A$, $D \subseteq F \subseteq Z(A)$, and algebra A is a free module over the ring F. Let $\overline{\overline{e}}$ be the basis of free module A over ring F. We assume that $e_0 = 1$.

Theorem 2.42. *Structural constants of D-algebra with unit e satisfy condition*

$$C_{0k}^l = C_{k0}^l = \delta_l^k \tag{2.30}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [5]-3.5. □

Consider maps

$$\mathrm{Re} : A \to A$$
$$\mathrm{Im} : A \to A$$

defined by equation

$$\mathrm{Re}\, d = d^0 \quad \mathrm{Im}\, d = d - d^0 \quad d \in D \quad d = d^i e_i \tag{2.31}$$

The expression $\mathrm{Re}\, d$ is called **scalar of element** d. The expression $\mathrm{Im}\, d$ is called **vector of element** d.

According to (2.31)

$$F = \{d \in A : \mathrm{Re}\, d = d\}$$

We will use notation $\mathrm{Re}\, A$ to denote **scalar algebra of algebra** A.

Theorem 2.43. *The set*

$$\mathrm{Im}\, A = \{d \in A : \mathrm{Re}\, d = 0\} \tag{2.32}$$

is $(\mathrm{Re}\, A)$*-module which is called* **vector module of algebra** A*.*

Proof. The theorem follows from the theorem [5]-4.1. □

According to the theorem 2.43, there is unique defined representation

$$d = \mathrm{Re}\, d + \mathrm{Im}\, d \tag{2.33}$$

Definition 2.44. *The map*

$$d^* = \mathrm{Re}\, d - \mathrm{Im}\, d \tag{2.34}$$

is called **conjugation in algebra** *provided that this map satisfies*

$$(cd)^* = d^*\, c^* \tag{2.35}$$

$(\mathrm{Re}\, A)$*-algebra A equipped with conjugation is called* **algebra with conjugation**. □

Theorem 2.45. *The* $(\mathrm{Re}\, A)$*-algebra A is algebra with conjugation iff structural constants of* $(\mathrm{Re}\, A)$*-algebra A satisfy condition*

$$C_{kl}^0 = C_{lk}^0 \quad C_{kl}^p = -C_{lk}^p \tag{2.36}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n \quad 1 \le p \le n$$

Proof. The theorem follows from the theorem [5]-4.5. □

2.6. **Polynomial over Associative D-Algebra.** Let D be commutative ring and A be associative D-algebra with unit.

Theorem 2.46. *Let $p_k(x)$ be* **monomial of power** k *over D-algebra A. Then*
2.46.1: *Monomial of power 0 has form $p_0(x)=a_0$, $a_0\in A$.*
2.46.2: *If $k>0$, then*
$$p_k(x)=p_{k-1}(x)xa_k$$
where $a_k\in A$.

Proof. The theorem follows from the theorem [6]-4.1. □

In particular, monomial of power 1 has form $p_1(x)=a_0xa_1$.

Definition 2.47. *We denote $A_k[x]$ Abelian group generated by the set of monomials of power k. Element $p_k(x)$ of Abelian group $A_k[x]$ is called* **homogeneous polynomial of power** k. □

Convention 2.48. *Let the tensor $a\in A^{\otimes(n+1)}$. When $x_1=...=x_n=x$, we assume*
$$a\circ x^n=a\circ(x_1\otimes...\otimes x_n)$$
□

Theorem 2.49. *We can present homogeneous polynomial $p(x)$ in the following form*
$$p(x)=a_k\circ x^k\quad a_k\in A^{\otimes(k+1)}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [6]-4.6. □

Definition 2.50. *We denote*
$$A[x]=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A_n[x]$$
direct sum[12] *of A-modules $A_n[x]$. An element $p(x)$ of A-module $A[x]$ is called* **polynomial** *over D-algebra A.* □

Definition 2.51. *The polynomial $p(x)$ is called* **divisor of polynomial** $r(x)$, *if we can represent the polynomial $r(x)$ as*
$$r(x)=q_{i\cdot0}(x)p(x)q_{i\cdot1}(x)=(q_{i\cdot0}(x)\otimes q_{i\cdot1}(x))\circ p(x)\tag{2.37}$$
□

Theorem 2.52. *Let $p(x)=p_1\circ x$ be homogeneous polynomial of power 1 and p_1 be nonsingular tensor. Let*
$$r(x)=r_0+r_1\circ x+...+r_k\circ x^k$$
be polynomial of power k. Then
$$\begin{aligned}r(x)&=r_0+q_{1\cdot0}p(x)q_{1\cdot1}+q_{2\cdot0}(x)p(x)q_{2\cdot1}+...+q_{k\cdot0}(x)p(x)q_{k\cdot1}\\&=r_0+(q_{1\cdot0}\otimes q_{1\cdot1})\circ p(x)+(q_{2\cdot0}(x)\otimes q_{2\cdot1})\circ p(x)\\&+...+(q_{k\cdot0}(x)\otimes q_{k\cdot1})\circ p(x)\end{aligned}\tag{2.38}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [6]-6.9. □

[12] See the definition of direct sum of modules in [1], page 128. On the same page, Lang proves the existence of direct sum of modules.

Theorem 2.53. *Let*

$$p(x) = p_0 + p_1 \circ x \tag{2.39}$$

be polynomial of power 1 *and* p_1 *be nonsingular tensor. Let*

$$r(x) = r_0 + r_1 \circ x + ... + r_k \circ x^k$$

be polynomial of power k*. Then*

$$\begin{aligned}
r(x) = r_0 &- ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\
&- (((r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\
&- ... - (((r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\
&+ ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\
&+ (((r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\
&+ ... + (((r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\
&= r_0 - ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s} + (r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s} \\
&+ ... + (r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\
&+ ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s} + (r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s} \\
&+ ... + (r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Proof. The theorem follows from the theorem [6]-6.10. □

2.7. Quaternion Algebra.

Definition 2.54. *Let* R *be real field. Extension field* $H = R(i, j, k)$ *is called* **the quaternion algebra** *if multiplication in algebra* H *is defined according to rule*

$$\begin{array}{c|ccc}
 & i & j & k \\
\hline
i & -1 & k & -j \\
j & -k & -1 & i \\
k & j & -i & -1
\end{array} \tag{2.41}$$

□

Elements of the algebra H have form

$$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k$$
$$x^0, x^1, x^2, x^3 \in R$$

Quaternion

$$\overline{x} = x^0 - x^1 i - x^2 j - x^3 k \tag{2.42}$$

is called conjugate to the quaternion x. We define **the norm of the quaternion** x using equation

$$|x|^2 = x\overline{x} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{2.43}$$

From the equality (2.43), it follows that inverse element has form

$$x^{-1} = |x|^{-2}\overline{x} \tag{2.44}$$

Theorem 2.55. *Let*

$$e_{\mathbf{0}}=1 \quad e_{\mathbf{1}}=i \quad e_{\mathbf{2}}=j \quad e_{\mathbf{3}}=k \tag{2.45}$$

be basis of quaternion algebra H. Then in the basis (2.45), structural constants have form

$$\begin{array}{llll}
C_{\mathbf{00}}^{\mathbf{0}}=1 & C_{\mathbf{01}}^{\mathbf{1}}=\ \ 1 & C_{\mathbf{02}}^{\mathbf{2}}=\ \ 1 & C_{\mathbf{03}}^{\mathbf{3}}=\ \ 1\\
C_{\mathbf{10}}^{\mathbf{1}}=1 & C_{\mathbf{11}}^{\mathbf{0}}=-1 & C_{\mathbf{12}}^{\mathbf{3}}=\ \ 1 & C_{\mathbf{13}}^{\mathbf{2}}=-1\\
C_{\mathbf{20}}^{\mathbf{2}}=1 & C_{\mathbf{21}}^{\mathbf{3}}=-1 & C_{\mathbf{22}}^{\mathbf{0}}=-1 & C_{\mathbf{23}}^{\mathbf{1}}=\ \ 1\\
C_{\mathbf{30}}^{\mathbf{3}}=1 & C_{\mathbf{31}}^{\mathbf{2}}=\ \ 1 & C_{\mathbf{32}}^{\mathbf{1}}=-1 & C_{\mathbf{33}}^{\mathbf{0}}=-1
\end{array} \tag{2.46}$$

Proof. See the proof of the theorem [4]-4.3.1. □

Theorem 2.56. *Equation*

$$ax-xa=1$$

in quaternion algebra does not have solutions.

Proof. The theorem follows from the theorem [3]-7.1. □

3. Simple Examples

Theorem 3.1.

$$(x+a)^2=x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^2 \tag{3.1}$$

Proof. The identity (3.1) follows from the equality

$$\begin{aligned}(x+a)(x+a)&=x(x+a)+a(x+a)=x^2+xa+ax+a^2\\&=x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^2\end{aligned}$$

□

Theorem 3.2.

$$\begin{aligned}(x+a)^3=&x^3+(1\otimes 1\otimes a+1\otimes a\otimes 1+a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2\\&+(1\otimes a^2+a\otimes a+a^2\otimes 1)\circ x+a^3\end{aligned} \tag{3.2}$$

Proof. The equality

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+a)(x+a)=(x+a)(x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^2)\\
&=x(x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^2)+a(x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^2)\\
&=x^3+x(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+xa^2+ax^2+a(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x+a^3\\
&=x^3+(1\otimes 1\otimes a+1\otimes a\otimes 1)\circ x^2+(1\otimes a^2)\circ x\\
&+(a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2+(a\otimes a+a^2\otimes 1)\circ x+a^3\\
&=x^3+(1\otimes 1\otimes a+1\otimes a\otimes 1+a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2\\
&+(1\otimes a^2+a\otimes a+a^2\otimes 1)\circ x+a^3\end{aligned} \tag{3.3}$$

follows from the identity (3.1). The identity (3.2) follows from the equality (3.3). □

Theorem 3.3.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a\otimes 1 + 1\otimes b)\circ x + ab \tag{3.4}$$

$$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+a) = 2x^2 + ((a+b)\otimes 1 + 1\otimes (a+b))\circ x + ab + ba \tag{3.5}$$

Proof. The identity (3.4) follows from the equality

$$(x+a)(x+b) = x(x+b)+a(x+b) = x^2 + xb + ax + ab$$

The identity (3.5) follows from the equality

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)+(x+b)(x+a) &= x(x+b)+a(x+b)+x(x+a)+b(x+a)\\ &= 2x^2+xb+ax+ab+xa+bx+ba\end{aligned}$$

□

Theorem 3.4.

$$\begin{aligned}&(c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2},\sigma_s)\circ(x+a,x+b)\\ &=(c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2},\sigma_s)\circ x^2\\ &+(c_{s\cdot 0}\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2}+c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\sigma_s(b)c_{s\cdot 2})\circ x+c_{s\cdot 0}\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(b)c_{s\cdot 2}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Proof. The identity (3.6) follows from the equality

$$\begin{aligned}&(c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2},\sigma_s)\circ(x+a,x+b)\\ &=c_{s\cdot 0}\sigma_s(x+a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(x+b)c_{s\cdot 2}\\ &=c_{s\cdot 0}(x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}(x+\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\\ &=c_{s\cdot 0}((x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}x+(x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\\ &=c_{s\cdot 0}(xc_{s\cdot 1}x+\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}x+xc_{s\cdot 1}\sigma_s(b)+\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\end{aligned}$$

□

4. Square Root

Definition 4.1. *The root* $x=\sqrt{a}$ *of the equation*

$$x^2 = a \tag{4.1}$$

in D-algebra A is called **square root** *of A-number a.* □

In quaternion algebra the equation

$$x^2 = -1$$

has at least 3 roots $x=i$, $x=j$, $x=k$. Our goal is the answer on the question how much roots has the equation (4.1).

Theorem 4.2. *Roots of the equation*[13]

$$(a+x)^2 = a^2 \tag{4.2}$$

satisfy to the equation

$$x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x = 0 \tag{4.3}$$

Proof. The equation (4.3) follows from (3.1), (4.2). □

[13] We consider x as difference between 2 square roots.

Theorem 4.3.

$$x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x=x\left(\frac{1}{2}x+a\right)+\left(\frac{1}{2}x+a\right)x \tag{4.4}$$

Proof. The identity (4.4) follows from the equation

$$\begin{aligned}x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x&=\frac{1}{2}x^2+xa+\frac{1}{2}x^2+ax\\&=x\left(\frac{1}{2}x+a\right)+\left(\frac{1}{2}x+a\right)x\end{aligned}$$

□

Corollary 4.4. *The equation*

$$x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x=0 \tag{4.5}$$

has roots $x=0$, $x=-2a$. □

Theorem 4.5. $x=j-i$ *is a root of the equation*

$$x^2+(1\otimes i+i\otimes 1)\circ x=0 \tag{4.6}$$

Proof. According to the theorem 4.3, the equation (4.6) is equivalent to the equation

$$x\left(\frac{1}{2}x+i\right)+\left(\frac{1}{2}x+i\right)x=0 \tag{4.7}$$

From the equation (4.7), it follows that

$$\begin{aligned}&(j-i)((j-i)+2i)+((j-i)+2i)(j-i)\\=&(j-i)(j+i)+(j+i)(j-i)\\=&(j-i)j+(j-i)i+(j+i)(j-i)\\=&j^2-ij+ji-i^2+j^2+ij-ji-i^2\\=&0\end{aligned}$$

□

The question arises. How many roots has the equation (4.6). From the equation

$$x(x+2a)+(x+2a)x=0 \tag{4.8}$$

it follows that

$$x(x+2a)=-(x+2a)x \tag{4.9}$$

From the equality (4.9) it follows that product of A-numbers $2a+x$, x is anti-commutative.

Theorem 4.6. *Let* $\overline{\overline{e}}$ *be the basis of finite dimentional associative* D*-algebra. Let* C_{kl}^i *be structural constants of* D*-algebra* A *relative the basis* $\overline{\overline{e}}$*. Then*

$$C_{kl}^i(x^kx^l+x^ka^l+a^kx^l)=0 \tag{4.10}$$

Proof. The equation (4.10) follows from the equation (4.8). □

Theorem 4.7. *In quaternion algebra, if $a = i$, then the equation (4.10) has set of solutions such that*

$$x^0 = 0 \quad -(x^1)^2 - 2x^1 = (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{4.11}$$

$$-2 \le x^1 \le 0 \tag{4.12}$$

Proof. Since $a = i$, then the equation (4.10) has form

$$\begin{aligned} C^i_{kl}x^kx^l + C^i_{k1}x^k + C^i_{1k}x^k &= 0\\ C^0_{kl}x^kx^l + C^0_{k1}x^k + C^0_{1k}x^k &= 0\\ C^1_{kl}x^kx^l + C^1_{k1}x^k + C^1_{1k}x^k &= 0\\ C^2_{kl}x^kx^l + C^2_{k1}x^k + C^2_{1k}x^k &= 0\\ C^3_{kl}x^kx^l + C^3_{k1}x^k + C^3_{1k}x^k &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

According to the theorem 2.55, from (2.46), (4.13), it follows that

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - 2x^1 = 0 \tag{4.14}$$

$$2x^0x^1 + 2x^0 = 0 \tag{4.15}$$

$$2x^0x^2 + x^3 - x^3 = 0 \tag{4.16}$$

$$2x^0x^3 - x^2 + x^2 = 0 \tag{4.17}$$

From the equation (4.15), it follows that either $x^0 = 0$, or $x^1 = -1$. Since $x^0 = 0$, then the equation (4.11) follows from the equation (4.14). The statement (4.12) follows from the requirement

$$-(x^1)^2 - 2x^1 \ge 0$$

If $x^1 = -1$, then either $x^0 = 0$, or $x^2 = x^3 = 0$. The statement $x^0 = 0$, $x^1 = -1$ is particular case of the statement of the theorem. The statement $x^1 = -1$, $x^2 = x^3 = 0$ is not true, because the equation (4.14) gets form

$$(x^0)^2 + 1 = 0$$

□

Theorem 4.8. *In quaternion algebra, if $a = 1$, then the equation (4.10) has 2 roots*

$$\begin{aligned} x^0 &= 0 & x^1 &= 0 & x^2 &= 0 & x^3 &= 0\\ x^0 &= -2 & x^1 &= 0 & x^2 &= 0 & x^3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Proof. Since $a = 1$, then the equation (4.10) has form

$$\begin{aligned} C^i_{kl}x^kx^l + C^i_{k0}x^k + C^i_{0k}x^k &= 0\\ C^0_{kl}x^kx^l + C^0_{k0}x^k + C^0_{0k}x^k &= 0\\ C^1_{kl}x^kx^l + C^1_{k0}x^k + C^1_{0k}x^k &= 0\\ C^2_{kl}x^kx^l + C^2_{k0}x^k + C^2_{0k}x^k &= 0\\ C^3_{kl}x^kx^l + C^3_{k0}x^k + C^3_{0k}x^k &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

From (2.46), (4.19), it follows that

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2+2x^0=0 \tag{4.20}$$

$$2x^0x^1+2x^1=0 \tag{4.21}$$

$$2x^0x^2+2x^2=0 \tag{4.22}$$

$$2x^0x^3+2x^3=0 \tag{4.23}$$

From equations (4.21), (4.22), (4.23), it follows that either

$$x^1=x^2=x^3=0 \tag{4.24}$$

or $x^0=-1$.

Since the equation (4.24) is true, then, from the equation (4.20), it follows that either $x^0=0$, or $x^0=-2$. So we get roots (4.18).

Since $x^0=-1$, then the equation (4.20) has form

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1=0 \tag{4.25}$$

The equation (4.25) does not have real roots. □

Theorem 4.9.

$$b^2-a^2=\frac{1}{2}(b-a)(b+a)+\frac{1}{2}(b+a)(b-a) \tag{4.26}$$

Proof. From the identity (3.1), it follows that

$$(x+a)^2-a^2=x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x \tag{4.27}$$

From (4.4), (4.27), it follows that

$$(x+a)^2-a^2=x\left(\frac{1}{2}x+a\right)+\left(\frac{1}{2}x+a\right)x \tag{4.28}$$

Let $b=x+a$. Then

$$x=b-a \tag{4.29}$$

From (4.28), (4.29), it follows that

$$b^2-a^2=(b-a)\left(\frac{1}{2}(b-a)+a\right)+\left(\frac{1}{2}(b-a)+a\right)(b-a) \tag{4.30}$$

The identity (4.26) follows from the equality (4.30). □

5. Algebra with Conjugation

According to the theorem 4.7, the equation

$$x^2=-1$$

in quaternion algebra has infinitely many roots. According to the theorem 4.8, the equation

$$x^2=1$$

in quaternion algebra has 2 roots. I did not expect so different statements. However, where is the root of this difference?

Let $\overline{\overline{e}}$ be the basis of finite dimentional D-algebra A. Let C^{i}_{kl} be structural constants of D-algebra A relative the basis $\overline{\overline{e}}$. Then the equation

$$x^2=a$$

has form

$$C^{i}_{kl}x^{k}x^{l} = a^{i} \tag{5.1}$$

relative to the basis $\overline{\overline{e}}$. The goal to solve the system of equations (5.1) is not easy task.

However we can solve this problem when algebra A has unit and is algebra with conjugation. According to the theorem 2.42, 2.45, structural constants of D-algebra A has following form

$$C^{0}_{00} = 1 \quad C^{0}_{kl} = \quad C^{0}_{lk} \tag{5.2}$$

$$C^{k}_{k0} = C^{k}_{0k} = 1 \quad C^{p}_{kl} = -C^{p}_{lk} \tag{5.3}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n \quad 1 \le p \le n$$

Theorem 5.1. *In D-algebra A with conjugation, the equation* (5.1) *gets form*

$$(x^{0})^2 + C^{0}_{kl}x^{k}x^{l} = a^{0} \tag{5.4}$$

$$2x^{0}x^{p} = a^{p} \tag{5.5}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n \quad 1 \le p \le n$$

Proof. The equation (5.4) follows from (5.1), (5.2) when $i = 0$. The equation (5.5) follows from (5.1), (5.3) when $i > 0$. □

Theorem 5.2. *Since* $\sqrt{a} \in \mathrm{Im}\, A$, *then* $a \in \mathrm{Re}\, A$. *The root of the equation*

$$x^2 = a$$

satisfy to the equation

$$C^{0}_{kl}x^{k}x^{l} = a^{0} \tag{5.6}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n$$

Proof. Since $x \in \mathrm{Im}\, A$, then

$$x^{0} = 0 \tag{5.7}$$

The equality

$$a^{p} = 0 \quad 1 \le p \le n \tag{5.8}$$

follows from (5.5), (5.7). From the equality (5.8), it follows that $a \in \mathrm{Re}\, A$. The equation (5.6) follows from (5.4), (5.7). □

The theorem 5.2 says nothing about number of roots. However following statement is evident.

Corollary 5.3. *In quaternion algebra, since* $a \in R$, $a < 0$, *then the equation*

$$x^2 = a$$

has infinitely many roots. □

Theorem 5.4. *Since* $\operatorname{Re}\sqrt{a}\ne 0$, *then roots of the equation*

$$x^2=a$$

satisfy to the equation

$$(x^{\mathbf{0}})^4-a^{\mathbf{0}}(x^{\mathbf{0}})^2+\frac{1}{4}C^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{kl}}a^{\boldsymbol{k}}a^{\boldsymbol{l}}=0 \tag{5.9}$$

$$x^{\boldsymbol{k}}=\frac{a^{\boldsymbol{k}}}{2x^{\mathbf{0}}} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{1}\le\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{n}\quad\mathbf{1}\le\boldsymbol{l}\le\boldsymbol{n}$$

Proof. Since $x^{\mathbf{0}}\ne 0$, then the equation (5.10) follows from the equation (5.5). The equation

$$(x^{\mathbf{0}})^2+C^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{kl}}\frac{a^{\boldsymbol{k}}a^{\boldsymbol{l}}}{4(x^{\mathbf{0}})^2}=a^{\mathbf{0}} \tag{5.11}$$

follows from equations (5.4), (5.10). The equation (5.9) follows from the equation (5.11). □

Theorem 5.5. *Let H be quaternion algebra and a be H-number.*

5.5.1: *Since* $\operatorname{Re}\sqrt{a}\ne 0$, *then the equation*

$$x^2=a$$

has roots $x=x_1$, $x=x_2$ *such that*

$$x_2=-x_1 \tag{5.12}$$

5.5.2: *Since $a=0$, then the equation*

$$x^2=a$$

has root $x=0$ with multiplicity 2.

5.5.3: *Since conditions 5.5.1, 5.5.2 are not true, then the equation*

$$x^2=a$$

has infinitly many roots such that

$$x\in\operatorname{Im}H\quad a\in\operatorname{Re}H\quad |x|=\sqrt{-a} \tag{5.13}$$

Proof. The equation

$$(x^{\mathbf{0}})^2-(x^{\mathbf{1}})^2-(x^{\mathbf{2}})^2-(x^{\mathbf{3}})^2=a^{\mathbf{0}} \tag{5.14}$$

follows from (2.46), (5.4).

If $a=0$, then the equation

$$(x^{\mathbf{0}})^2-(x^{\mathbf{1}})^2-(x^{\mathbf{2}})^2-(x^{\mathbf{3}})^2=0 \tag{5.15}$$

follows from the equation (5.14). From (5.5), it follows that either $x^{\mathbf{0}}=0$, or $x^{\mathbf{1}}=x^{\mathbf{2}}=x^{\mathbf{3}}=0$. In both cases, the statement 5.5.2 follows from the equation (5.15).

Since $\mathrm{Re}\sqrt{a}\neq 0$, then we can apply the theorem 5.4 to the equation (5.14). Therefore, we get the equation

$$(x^{\mathbf{0}})^4-a^{\mathbf{0}}(x^{\mathbf{0}})^2-\frac{1}{4}((a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2)=0 \tag{5.16}$$

which is quadratic equation

$$y^2-a^{\mathbf{0}}y-\frac{1}{4}((a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2)=0 \tag{5.17}$$

relative

$$y=(x^{\mathbf{0}})^2 \tag{5.18}$$

Since

$$(a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2\geq 0$$

then we have to consider two cases.

- Since

  $$(a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2>0$$

  then, according to Viéte's theorem, the equation (5.17) has roots $y=y_1$, $y_1<0$, and $y=y_2$, $y_2>0$. According to the equality (5.18), we consider only the root $y=y_2$, $y_2>0$. Therefore, the equation (5.16) has two roots

  $$x^{\mathbf{0}}_1=\sqrt{y_2}\qquad x^{\mathbf{0}}_2=-\sqrt{y_2} \tag{5.19}$$

  The equality (5.12) follows from equalities (5.10), (5.19).
- Since

  $$(a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2=0$$

  then

  $$a^{\mathbf{1}}=a^{\mathbf{2}}=a^{\mathbf{3}}=0 \tag{5.20}$$

  Since $\mathrm{Re}\sqrt{a}\neq 0$, then the statement

  $$x^{\mathbf{1}}=x^{\mathbf{2}}=x^{\mathbf{3}}=0 \tag{5.21}$$

  follows from (5.10), (5.20). Therefore, the equation (5.17) has form

  $$y^2-a^{\mathbf{0}}y=0 \tag{5.22}$$

  According to the proof of the theorem 5.4, the value $y=0$ is extraneous root. Therefore, the equation (5.22) is equivalent to the equation

  $$y-a^{\mathbf{0}}=0 \tag{5.23}$$

  Let[14] $a^{\mathbf{0}}>0$. From equations (5.18), (5.23), it follows that the equation (5.16) has two roots

  $$x^{\mathbf{0}}_1=\sqrt{a^{\mathbf{0}}}\qquad x^{\mathbf{0}}_2=-\sqrt{a^{\mathbf{0}}} \tag{5.24}$$

  The equality (5.12) follows from equalities (5.10), (5.24).

[14] We considered the value $a^{\mathbf{0}}=0$ in the statement 5.5.2. We considered the value $a^{\mathbf{0}}<0$ in the statement 5.5.3.

Since conditions 5.5.1, 5.5.2 are not true, then $a \neq 0$; however $\mathrm{Re}\sqrt{a} = 0$. According to the theorem 5.2, $a \in \mathrm{Re}\, A$, $a^0 \neq 0$ and the equation

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -a^0 \tag{5.25}$$

follows from the equation (5.6) and from the equality (2.46). Let[15] $a^0 < 0$. Then the equation (5.25) has infinitely many roots satisfying to condition (5.13). □

6. Few Remarks

I was ready to the statement that the equation

$$x^2 = a$$

has infinitely many roots. However the theorem 5.5 is more surprising. A number of roots in quaternion algebra H depends on the value of H-number a.

Square root in complex field C has two values. We use Riemann surface[16] RC to represent the map

$$\sqrt{} : z \in C \to \sqrt{z} \in RC$$

I think that we can consider similar surface in quaternion algebra. However the topology of such surface is more complicated.

Mathematicians have studied the theory of noncommutative polynomials during the XX century; and knowledge of the results obtained during this time is important to continue research.

In the book [13], on page 48, Paul Cohn wrote that study of polynomials over noncommutative algebra A is not easy task. To simplify the task and get some preliminary statements, Paul Cohn suggested to consider polynomials whose coefficients are A-numbers and written on the right. Thus, according to Cohn, a polynomial over D-algebra A has form

$$p(x) = a_0 + xa_1 + ... + x^n a_n \quad a_i \in A$$

This convention allowed us to overcome difficulties related with noncommutative algebra and to get interesting statements about polynomials. However, in general, not every statement is true.

We consider the following example. In the book [14], page 262, Tsit Lam considers polynomials whose coefficients are A-numbers and written on the left.[17] According to Tsit Lam, the product of polynomials has form

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab \tag{6.1}$$

The product (6.1) of polynomials is not compatible with the product in D-algebra A.

Although we can consider the equation (6.1) as generalization of the Viéte's theorem,[18] Tsit Lam draws our attention to the statement that A-number a is not the root of the polynomial f. I think, this one of the reason, why the definition of left, right and pseudo roots was considered in [2, 14].

My road into the theory of noncommutative polynomials passes through calculus (section [8]-4.2). Somebody's road may passes through physics. I think

[15] We considered the value $a^0 > 0$ 5.5.1.

[16] The definition of Riemann surface see [15], pages 170, 171.

[17] The difference in notation used by Cohn and Lam to represent polynomial is not important.

[18] In the proposition [2]-1.1, Vladimir Retakh considered another statement for the Viéte's theorem for polynomial over noncommutative algebra.

that mathematical operation must be consistent with request from other theories. Development of new ideas and methods gives us possibility of advance in study of noncommutative polynomials. Development of new ideas and methods allows us to move forward in the study of noncommutative polynomials. The goal of this paper is to show what future do we have today to study noncommutative polynomials.

7. Questions and Answers

In this section, I collected questions that must be answered to study noncommutative polynomials. We will concentrate our attention on **quadratic equation**

$$(a_{s\cdot0}\otimes a_{s\cdot1}\otimes a_{s\cdot2})\circ x^2+(b_{t\cdot0}\otimes b_{t\cdot1})\circ x+c=0 \tag{7.1}$$

on the Viéte theorem and on completing the square.

Let $r(x)$ be a polynomial of order 2. According to the definition 2.51, polynomial

$$p(x)=x-a=(1\otimes1)\circ x-a$$

is divisor of polynomial $r(x)$, if there exist polynomials $q_{i\cdot0}(x)$, $q_{i\cdot1}(x)$ such that

$$r(x)=q_{i\cdot0}(x)p(x)q_{i\cdot1}(x) \tag{7.2}$$

According to the theorem 2.52, for every i, the power of one of the polynomials $q_{i\cdot0}(x)$, $q_{i\cdot1}(x)$ equals 1, and the other polynomial is A-number. Since the polynomial r has also root b, is it possible to represent the polynomial r as product of polynomials $x-a$, $x-b$. In what order should we multiply polynomials $x-a$, $x-b$? Considering the symmetry of roots a and b, I expect that factorization of polynomial $p(x)$ into polynomials has form

$$r(x)=(c,\sigma)\circ(x-a,x-b)=(c_{s\cdot0}\otimes c_{s\cdot1}\otimes c_{s\cdot2},\sigma_s)\circ(x-a,x-b) \tag{7.3}$$

Question 7.1. *Let either $a\notin Z(A)$, $b\notin Z(A)$, or $a\notin Z(A)$, $c\notin Z(A)$. Let polynomial $p(x)$ have form*

$$p(x)=(x-b)(x-a)+(x-a)(x-c) \tag{7.4}$$

7.1.1: *Is the value $x=a$ a single root of the polynomial $p(x)$ or is there another root of the polynomial $p(x)$?*

7.1.2: *Is there a representation of the polynomial $p(x)$ in the form (7.3).*

□

Let $a, b\in Z(A)$. Then

$$(x-b)(x-a)=x^2-bx-xa+ba=x^2-xb-ax+ab=(x-a)(x-b)$$

and we can reduce expression of the polynomial (7.4)

$$\begin{aligned}p(x)&=(x-b)(x-a)+(x-a)(x-c)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)\\&=(x-a)(2x-b-c)\end{aligned}$$

The answer is evident. So we set either $a\notin Z(A)$, $b\notin Z(A)$, or $a\notin Z(A)$, $c\notin Z(A)$.

From construction considered in subsection 1.2, it follows that quadratic equation may have 1 root. Now I am ready to give one more example of quadratic equation which has 1 root.

Theorem 7.2. *In quaternion algebra, there exists quadratic equation which has 1 root.*

Proof. According to the theorem 2.56, the polynomial

$$p(x) = jx - xj - 1$$

does not have root in the quaternion algebra. Therefore, the polynomial

$$p(x)(x-i) = (jx - xj - 1)(x - i) = jx^2 - xjx - x - jxi - xk + i$$

has 1 root. □

Theorem 7.3. *In quaternion algebra, there exists quadratic equation which has no root.*

Proof. According to the theorem 2.56, polynomials

$$p(x) = jx - xj - 1$$

$$q(x) = kx - xk - 1$$

do not have root in the quaternion algebra. Therefore, the polynomial

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (jx - xj - 1)(kx - xk - 1) \\ &= (jx - xj - 1)kx - (jx - xj - 1)xk + jx - xj - 1 \\ &= jxkx - xjkx - kx - jxxk + xjxk + xk + jx - xj - 1 \\ &= jxkx - jx^2k + xjxk - xix - kx + xk + jx - xj - 1 \end{aligned}$$

has no root. □

Question 7.4. *Whether there are irreducible polynomials of degree higher than* 2*? What is the structrure of the set of irreducible polynomials?* □

Question 7.5. *Does the set of roots of polynomial* (7.3) *depend on tensor* a *and the set of permutations* σ*?* □

Question 7.6. *For any tensor* $b_{i\cdot 0} \otimes b_{i\cdot 1} \in A \otimes A$, *is there* A*-number* a *such that*

$$1 \otimes a + a \otimes 1 = b_{i\cdot 0} \otimes b_{i\cdot 1} \tag{7.5}$$

□

Let answer to the question 7.6 be positive. Then, using the identity (3.1), we can apply the method of completing the square in order to solve **reduced quadratic equation**

$$x^2 + (p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1}) \circ x + q = 0$$

There is good reason to believe that answer to the question 7.6 is negative.

The set of polynomials (7.3) is too large to consider the Viéte's theorem. The Viéte's theorem assumes reduced quadratic equation. Therefore, to consider the Viéte's theorem, we must consider the polynomials whose coefficient before x^2 is equal to $1 \otimes 1 \otimes 1$. The simplest form of such polynomials is

$$c(x - x_1)(x - x_2) + d(x - x_2)(x - x_1) = 0 \tag{7.6}$$

where c, d are any A-numbers such that

$$c + d = 1$$

Theorem 7.7 (François Viéte)**.** *Since quadratic equation*

$$x^2+(p_{s\cdot 0}\otimes p_{s\cdot 1})\circ x+q=0 \tag{7.7}$$

has roots $x=x_1$, $x=x_2$, *then there exist A-numbers c, d,*

$$c+d=1$$

such that one of the following statements is true

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0}\otimes p_{s\cdot 1}&=-((cx_1)\otimes 1+c\otimes x_2+(dx_2)\otimes 1+d\otimes x_1)\\ q&=cx_1x_2+dx_2x_1\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0}\otimes p_{s\cdot 1}&=-((x_1c)\otimes 1+1\otimes(cx_2)+(x_2d)\otimes 1+1\otimes(dx_1))\\ q&=x_1cx_2+x_2dx_1\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0}\otimes p_{s\cdot 1}&=-(x_1\otimes c+1\otimes(x_2c)+x_2\otimes d+1\otimes(x_1d))\\ q&=x_1x_2c+x_2x_1d\end{aligned} \tag{7.10}$$

Proof. The statement (7.8) follows from the equality

$$\begin{aligned}&c(x-x_1)(x-x_2)+d(x-x_2)(x-x_1)\\ =&c(x-x_1)x-c(x-x_1)x_2+d(x-x_2)x-d(x-x_2)x_1\\ =&cx^2-cx_1x-cxx_2+cx_1x_2+dx^2-dx_2x-dxx_1+dx_2x_1\\ =&x^2-cx_1x-cxx_2-dx_2x-dxx_1+cx_1x_2+dx_2x_1\end{aligned} \tag{7.11}$$

The statement (7.9) follows from the equality

$$\begin{aligned}&(x-x_1)c(x-x_2)+(x-x_2)d(x-x_1)\\ =&(x-x_1)cx-(x-x_1)cx_2+(x-x_2)dx-(x-x_2)dx_1\\ =&xcx-x_1cx-xcx_2+x_1cx_2+xdx-x_2dx-xdx_1+x_2dx_1\\ =&x^2-x_1cx-xcx_2-x_2dx-xdx_1+x_1cx_2+x_2dx_1\end{aligned} \tag{7.12}$$

The statement (7.10) follows from the equality

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)c+(x-x_2)(x-x_1)d\\ =&(x-x_1)xc-(x-x_1)x_2c+(x-x_2)xd-(x-x_2)x_1d\\ =&x^2c-x_1xc-xx_2c+x_1x_2c+x^2d-x_2xd-xx_1d+x_2x_1d\\ =&x^2-x_1xc-xx_2c-x_2xd-xx_1d+x_1x_2c+x_2x_1d\end{aligned} \tag{7.13}$$

□

Question 7.8. *In the theorem 7.7, did I list all possible representation of reduced equation (7.7)?* □

We consider the question 7.1 from the point of view of the theorem 7.7. Let the polynomial

$$p(x)=(x-b)(x-a)+(x-a)(x-c) \tag{7.14}$$

have roots $x=a$, $x=d$. There exist A-numbers f, g,

$$f+g=1$$

such that

$$2afd+2dga=ba+ac \tag{7.15}$$

We have got the oquation of power 2 relative two unknown.

Question 7.9. *Let $x=x_3$ be the root of polynomial (7.3). Will the polynomial $p(x)$ change when we use value x_3 instead of value x_2.* □

Values $x=i$, $x=-i$ generate polynomial

$$
\begin{aligned}
p(x)&=(x-i)(x+i)+(x+i)(x-i)\\
&=x(x+i)-i(x+i)+(x+i)x-(x+i)i\\
&=x^2+xi-ix-i^2+x^2+ix-xi-i^2\\
&=2x^2+2
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

Values $x=i$, $x=-j$ generate polynomial

$$
\begin{aligned}
q(x)&=(x-i)(x+j)+(x+j)(x-i)\\
&=x(x+j)-i(x+j)+(x+j)x-(x+j)i\\
&=x^2+xj-ix-ij+x^2+jx-xi-ji\\
&=2x^2+x(j-i)+(j-i)x
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

As we can see, polynomial $p(x)$, $q(x)$ are different. Even more

$$
\begin{aligned}
q(-i)&=2(-i)^2+(-i)(j-i)+(j-i)(-i)\\
&=2(-1)+(-i)j-(-i)i+j(-i)-i(-i)\\
&=-2-ij+i^2-ji+i^2=-2+2i^2=-4
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

8. References

[1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002

[2] Vladimir Retakh, From factorizations of noncommutative polynomials to combinatorial topology,
eprint arXiv:0911.4454 (2009)

[3] Aleks Kleyn, Linear Equation in Finite Dimensional Algebra,
eprint arXiv:0912.4061 (2010)

[4] Aleks Kleyn, Linear Maps of Free Algebra,
eprint arXiv:1003.1544 (2010)

[5] Aleks Kleyn, Algebra with Conjugation,
eprint arXiv:1105.4307 (2011)

[6] Aleks Kleyn, Polynomial over Associative D-Algebra,
eprint arXiv:1302.7204 (2013)

[7] Aleks Kleyn, Linear Map of D-Algebra,
eprint arXiv:1502.04063 (2015)

[8] Aleks Kleyn, Introduction into Calculus over Banach Algebra,
eprint arXiv:1601.03259 (2016)

[9] Rida T. Farouki, Graziano Gentili, Carlotta Giannelli, Alessandra Sestini, Caterina Stoppato,
Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients,
eprint arXiv:1506.05848 (2015)

[10] John C. Baez, The Octonions,
eprint arXiv:math.RA/0105155 (2002)

[11] Paul M. Cohn, Universal Algebra, Springer, 1981

[12] Paul M. Cohn, Algebra, Volume 1, John Wiley & Sons, 1982

[13] Paul M. Cohn, Skew Fields, Cambridge University Press, 1995

[14] T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, 1991
[15] Shabat B. V., Introduction to Complex Analysis, Moscow, Nauka, 1969
[16] Postnikov M. M., Geometry IV: Differential geometry, Moscow, Nauka, 1983
[17] Alekseyevskii D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V., Basic Concepts of Differential Geometry
VINITI Summary 28
Moscow. VINITI, 1988
[18] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1995

9. Index

A-number 9
A-representation in Ω-algebra 5
algebra over ring 9
algebra with conjugation 13
arity 4
associative D-algebra 10
associative law 7
associator of D-algebra 10
norm of quaternion 15

carrier of Ω-algebra 5
Cartesian power 4
center of D-algebra A 10
commutative D-algebra 10
commutator of D-algebra 10
conjugation in algebra 13

D-algebra 9
D-module 7
D-vector space 7
distributive law 7
divisor of polynomial 14

effective representation of Ω-algebra 5
endomorphism 5

free algebra over ring 9

homogeneous polynomial of power k 14
homomorphism 5

linear map 7, 11

module over ring 7
monomial of power k 14
morphism of representation f 6
morphism of representations from f into g 6
morphism of representations of Ω_1-algebra in Ω_2-algebra 6

n-ary operation on set 4
nucleus of D-algebra A 10

operation on set 4
operator domain 4

polylinear map 8, 11
polynomial 14

quadratic equation 25
quaternion algebra 15

reduced morphism of representations 6
reduced quadratic equation 26
representation of Ω_1-algebra A in Ω_2-algebra M 5

scalar algebra of algebra 13
scalar of element of algebra 13
square root 17
structural constants 10

tensor product 8
transformation of universal algebra 5

unitarity law 7
universal algebra 5

vector module of algebra 13
vector of element of algebra 13
vector space over field 7

Ω-algebra 5

10. Special Symbols and Notations

$A[x]$ A-algebra of polynomials over D-algebra A 14
(a, b, c) associator of D-algebra 10
$[a, b]$ commutator of D-algebra 10

$A_k[x]$ A-module of homogeneous polynomials over D-algebra A 14
A_Ω Ω-algebra 5
$\sqrt{a}$ square root 17

B^A Cartesian power 4

C^k_{ij} structural constants 10

d^* conjugation in algebra 13

H quaternion algebra 15

$\mathrm{Im}\,A$ vector module of algebra A 13
$\mathrm{Im}\,d$ vector of element d of algebra 13

$\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ set of linear maps 7, 11
$\mathcal{L}(D; A_1, ..., A_n; S)$ set of polylinear maps 11
$\mathcal{L}(D; A^n; S)$ set of n-linear maps 11

$\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$ set of transformations of universal algebra M 5

$N(A)$ nucleus of D-algebra A 10

$A_1 \otimes ... \otimes A_n$ tensor product 8

$\mathrm{Re}\,A$ scalar algebra of algebra A 13
$\mathrm{Re}\,d$ scalar of element d of algebra 13

$Z(A)$ center of D-algebra A 10

Ω operator domain 4
$\Omega(n)$ set of n-ary operators 4

Квадратное уравнение над ассоциативной D-алгеброй

Александр Клейн

Аннотация. В статье рассматривается квадратное уравнение над ассоциативной D-алгеброй. В алгебре кватернионов H, уравнение $x^2 = a$ имеет либо 2 корня, либо бесконечно много корней. Если $a \in R$, $a < 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней. В противном случае, уравнение имеет корни x_1, x_2, $x_2 = -x_1$. Я рассмотрел варианты теоремы Виета и возможность применить метод выделения полного квадрата.

В алгебре кватернионов существует квадратное уравнение, которое либо имеет 1 корень, либо не имеет корней.

Содержание

1. Предисловие . . . 1
1.1. Предисловие к изданию 1 . . . 1
1.2. Предисловие к изданию 2 . . . 2
2. Предварительные определения . . . 4
2.1. Универсальная алгебра . . . 4
2.2. Представление универсальной алгебры . . . 5
2.3. Модуль над коммутативным кольцом . . . 7
2.4. Алгебра над коммутативным кольцом . . . 10
2.5. Алгебра с сопряжением . . . 13
2.6. Многочлен над ассоциативной D-алгеброй . . . 14
2.7. Алгебра кватернионов . . . 16
3. Простые примеры . . . 17
4. Квадратный корень . . . 18
5. Алгебра с сопряжением . . . 21
6. Несколько замечаний . . . 24
7. Вопросы и ответы . . . 25
8. Список литературы . . . 29
9. Предметный указатель . . . 31
10. Специальные символы и обозначения . . . 32

1. Предисловие

1.1. Предисловие к изданию 1. Много лет назад, в седьмом классе на уроках алгебры, моя учительница научила меня решать квадратные уравнения. Это не было сложно. Хотя потребовалось время, чтобы запомнить формулу,

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/ http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
http://sites.google.com/site/AleksKleyn/ http://AleksKleyn.blogspot.com/.

простая идея выделения полного квадрата всегда позволяла выполнить необходимые вычисления.

Несмотря на кажущуюся простоту, каждый раз узнавая что-то новое, я испытывал радость открытия. С годами более сильные чувства притупили воспоминание этого чувства. Но судьба наша непредсказуема и иногда любит пошутить. Назад в школу. Я опять учусь решать квадратные уравнения, изучаю стандартные алгебраические тождества.

Это неважно, что я изучаю некоммутативную алгебру вместо действительных чисел. Память ведёт меня по известной дороге, и я ей доверяю. Где-то там, за поворотом, меня ждёт радость нового открытия.

Июнь, 2015

1.2. **Предисловие к изданию 2.** Вскоре после публикации статьи, я нашёл ответ на вопрос 7.1 в статье [9]. В этой статье авторы рассматривают уравнения вида

$$xp_0x^* + xQ + Rx^* = S \tag{1.1}$$

где Q, R, S - H-числа и $p_0 \in R$. Поскольку

$$x^* = -\frac{1}{2}(x + ixi + jxj + kxk)$$

в алгебре кватернионов, то уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} &p_0x^2 - \frac{p_0}{2}xixi - \frac{p_0}{2}xjxj - \frac{p_0}{2}xkxk \\ &+ xQ - \frac{R}{2}x - \frac{R}{2}ixi - \frac{R}{2}jxj - \frac{R}{2}kxk = S \end{aligned} \tag{1.2}$$

В статье [9], дан полный анализ решений уравнения (1.1) (теорема [9]-2 на странице 7).

Однако меня смутил вариант 2, когда уравнение может иметь один корень. Согласно доказательству, мы получаем единственный корень. Однако кратность этого корня должна быть 2, так как это корень квадратного уравнения. Поэтому я решил проверить этот вариант на конкретном уравнении. Я выбрал коэффициенты

$$Q = 4i \quad R = -4j \quad p_0 = 8$$

В этом случае уравнение (1.1) имеет вид

$$x8x^* + 4xi - 4jx^* = -1 - 2k \tag{1.3}$$

и имеет единственный корень

$$x = -\frac{Q^* + R}{2p_0} = -\frac{-4i - 4j}{2\ 8} = \frac{1}{4}(i + j) \tag{1.4}$$

Так как уравнения (1.1), (1.2) эквивалентны, то уравение (1.3) можно записать в виде

$$p(x) = 0 \tag{1.5}$$

где многочлен $p(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}p(x)=&(-4\otimes 1\otimes 1-4\otimes i\otimes i-4\otimes j\otimes j-4\otimes k\otimes k)\circ x^2\\&+(4\otimes i+2j\otimes 1-2k\otimes i-2\otimes j+2i\otimes k)\circ x+1+2k\\&=(-4x^2-4xixi-4xjxj-4xkxk\\&+4xi+2jx-2kxi-2xj+2ixk+1+2k\end{aligned}\tag{1.6}$$

Так как (1.4) является корнем уравнения (1.5), то многочлен

$$q(x)=x-\frac{1}{4}(i+j)\tag{1.7}$$

является делителем многочлена $p(x)$. Применяя алгоритм деления, рассмотренный в теореме 2.53, мы получим

$$\begin{aligned}p(x)=&-4q(x)(x+ixi+jxj+kxk-i)\\&+q(x)(i-j)-iq(x)(1-k)+jq(x)(k+1)-kq(x)(j+i)\end{aligned}\tag{1.8}$$

Выражение (1.8) не даёт ответа на поставленный вопрос. Поэтому я оставляю вопрос 7.1 открытым.

Это интересный поворот. Основная задача этой статьи была показать, что некоторые идеи могут облегчить исследование в области некоммутативной алгебры. В тоже время, эта статья поднимает вопрос об эффективности алгоритма деления, рассмотренного в теореме 2.53. Это хорошо. Чтобы решить задачу, мы должны её увидеть.

Тем не менее, рассмотрим результат деления более подробно.

$$\begin{aligned}p(x)=&(-4\otimes(x+ixi+jxj+kxk-i)\\&+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i))\circ q(x)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Частное от деления - это тензор

$$\begin{aligned}s(x)=&-4\otimes(x+ixi+jxj+kxk-i)\\&+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i)\end{aligned}$$

который линейно зависит от x. Согласно теореме [9]-2 на странице 7, значение x, отличное от значения (1.4) не является корнем тензора $s(x)$. Из равенства

$$\begin{aligned}s(\frac{1}{4}(i+j))=&2\otimes(-i-j)+4\otimes i\\&+1\otimes(i-j)-i\otimes(1-k)+j\otimes(k+1)-k\otimes(j+i)\\&=-2\otimes i-2\otimes j+4\otimes i\\&+1\otimes i-1\otimes j-i\otimes 1+i\otimes k+j\otimes k+j\otimes 1-k\otimes j-k\otimes i\\&=-3\otimes j+3\otimes i\\&-i\otimes 1+i\otimes k+j\otimes k+j\otimes 1-k\otimes j-k\otimes i\end{aligned}$$

следует, что значение x (1.4) не является корнем тензора $s(x)$.

Чтобы лучше понять конструкцию, которую мы сейчас увидели, рассмотрим многочлен с известными корнями, например,

$$p(x)=2(x-i)(x-j)+(x-j)(x-i)=3x^2-2ix-2xj-jx-xi+k$$

и поделим этот многочлен на многочлен

$$r(x)=x-i$$

Применяя алгоритм деления, рассмотренный в теореме 2.53, мы получим

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3(r(x)+i)x - 2ix - 2xj - jx - xi + k \\
&= 3r(x)x + ix - 2xj - jx - xi + k \\
&= 3r(x)x + i(r(x)+i) - 2(r(x)+i)j - j(r(x)+i) - (r(x)+i)i + k \\
&= 3r(x)x + ir(x) - 2r(x)j - jr(x) - r(x)i \\
&= (3\otimes x + i\otimes 1 - 2\otimes j - j\otimes 1 - 1\otimes i)\circ r(x)
\end{aligned}$$

Следовательно, частное от деления многочлена $p(x)$ на многочлен $r(x)$ - это тензор

$$s(x) = 3\otimes x + i\otimes 1 - 2\otimes j - j\otimes 1 - 1\otimes i$$

Очевидно, что

$$s(j) = 1\otimes(j-i) - (j-i)\otimes 1 \neq 0\otimes 0$$

Но

$$s(j)\circ r(j) = 0$$

Очевидно, что этот метод не работает в случае кратных корней.

Я пока не готов рассмотреть деление многочлена (1.6) на многочлен второй степени. Опираясь на вид многочлена (1.6), мы можем предположить, что делитель имеет вид

$$\begin{aligned}
r(x) = &-\frac{1}{4}(4x-i-j)(4x-i-j) - \frac{1}{4}(4x-i-j)i(4x-i-j)i \\
&-\frac{1}{4}(4x-i-j)j(4x-i-j)j - \frac{1}{4}(4x-i-j)k(4x-i-j)k
\end{aligned}$$

Однако, очевидно, что $r(x)\in R$ для любого x. Это рассуждение окончательно убедило меня, что теорема [9]-2 на странице 7 верна.

Январь, 2016

2. Предварительные определения

2.1. Универсальная алгебра.

Определение 2.1. *Для любых множеств*[1] A, B, **декартова степень** B^A - *это множество отображений*

$$f: A\to B$$

$\square$

Определение 2.2. *Пусть дано множество A и целое число $n\ge 0$. Отображение*[2]

$$\omega: A^n\to A$$

называется n**-арной операцией на множестве** A *или просто* **операцией на множестве** A. *Для любых* a_1, ..., $a_n\in A$, *мы пользуемся любой из форм записи* $\omega(a_1,...,a_n)$, $a_1...a_n\omega$ *для обозначения образа отображения* ω. $\square$

Замечание 2.3. *Согласно определениям 2.1, 2.2, n-арная операция* $\omega\in A^{A^n}$. $\square$

[1] Я следую определению из примера (iV), [11], страницы 17, 18.

[2] Определение 2.2 опирается на определение в примере (vi), страница [11]-26.

Определение 2.4. Область операторов - *это ножество операторов*[3] Ω *вместе с отображением*

$$a:\Omega\to N$$

Если $\omega\in\Omega$ *, то* $a(\omega)$ *называется* **арностью** *оператора* ω. *Если* $a(\omega)=n$, *то оператор* ω *называется* n*-арным. Мы пользуемся обозначением*

$$\Omega(n)=\{\omega\in\Omega:a(\omega)=n\}$$

для множества n*-арных операторов.* □

Определение 2.5. *Пусть* A *- множество, а* Ω *- область операторов.*[4] *Семейство отображений*

$$\Omega(n)\to A^{A^n}\quad n\in N$$

называется структурой Ω*-алгебры на* A. *Множество* A *со структурой* Ω*-алгебры называется* **Ω-алгеброй** A_Ω *или* **универсальной алгеброй**. *Множество* A *называется* **носителем Ω-алгебры**. □

Область операторов Ω описывает множество Ω-алгебр. Элемент множества Ω называется оператором, так как операция предполагает некоторое множество. Согласно замечанию 2.3 и определению 2.5, каждому оператору $\omega\in\Omega(n)$ сопоставляется n-арная операция ω на A.

Определение 2.6. *Пусть* A, B *-* Ω*-алгебры и* $\omega\in\Omega(n)$. *Отображение*[5]

$$f:A\to B$$

согласовано с операцией ω, *если, для любых* a_1, ..., $a_n\in A$,

$$f(a_1)...f(a_n)\omega=f(a_1...a_n\omega)\tag{2.1}$$

Отображение f *называется* **гомоморфизмом** Ω*-алгебры* A *в* Ω*-алгебру* B, *если* f *согласовано с каждым* $\omega\in\Omega$ *.* □

Определение 2.7. *Гомоморфизм, источником и целью которого является одна и таже алгебра, называется* **эндоморфизмом**. □

2.2. **Представление универсальной алгебры.**

Определение 2.8. *Пусть множество* A *является* Ω*-алгеброй. Эндоморфизм* $t\in\mathrm{End}(\Omega;A)$ *называется* **преобразованием универсальной алгебры** A. □

Определение 2.9. *Пусть множество* A_2 *является* Ω_2*-алгеброй. Пусть на множестве преобразований* $\mathrm{End}(\Omega_2;A_2)$ *определена структура* Ω_1*-алгебры. Гомоморфизм*

$$f:A_1\to\mathrm{End}(\Omega_2;A_2)$$

Ω_1*-алгебры* A_1 *в* Ω_1*-алгебру* $\mathrm{End}(\Omega_2;A_2)$ *называется* **представлением Ω_1-алгебры** *или* **A_1-представлением** *в* Ω_2*-алгебре* A_2. □

Мы будем также пользоваться записью

$$f:A_1\xrightarrow{*}A_2$$

для обозначения представления Ω_1-алгебры A_1 в Ω_2-алгебре A_2.

---

[3] Я следую определению 1, страница [11]-62.
[4] Я следую определению 2, страница [11]-62.
[5] Я следую определению на странице [11]-63.

Определение 2.10. *Мы будем называть представление*

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

Ω_1*-алгебры* A_1 **эффективным**,[6] *если отображение*

$$f : A_1 \to \mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$$

является изоморфизмом Ω_1*-алгебры* A_1 *в* $\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$. □

Определение 2.11. *Пусть*

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

представление Ω_1*-алгебры* A_1 *в* Ω_2*-алгебре* A_2 *и*

$$g : B_1 \dashrightarrow B_2$$

представление Ω_1*-алгебры* B_1 *в* Ω_2*-алгебре* B_2. *Для* $i = 1, 2$, *пусть отображение*

$$r_i : A_i \to B_i$$

является гомоморфизмом Ω_j*-алгебры. Матрица отображений* $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *таких, что*

$$r_2 \circ f(a) = g(r_1(a)) \circ r_2 \tag{2.2}$$

называется **морфизмом представлений из** f **в** g. *Мы также будем говорить, что определён* **морфизм представлений** Ω_1**-алгебры в** Ω_2**-алгебре**. □

Замечание 2.12. *Мы можем рассматривать пару отображений* r_1, r_2 *как отображение*

$$F : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$$

такое, что

$$F(A_1) = B_1 \quad F(A_2) = B_2$$

Поэтому в дальнейшем матрицу отображений $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *мы будем также называть отображением.* □

Определение 2.13. *Если представления* f *и* g *совпадают, то морфизм представлений* $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ *называется* **морфизмом представления** f. □

Определение 2.14. *Пусть*

$$f : A_1 \dashrightarrow A_2$$

представление Ω_1*-алгебры* A_1 *в* Ω_2*-алгебре* A_2 *и*

$$g : A_1 \dashrightarrow B_2$$

представление Ω_1*-алгебры* A_1 *в* Ω_2*-алгебре* B_2. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} : A_1 \to A_1 & r_2 : A_2 \to B_2 \end{pmatrix}$$

---

[6] Аналогичное определение эффективного представления группы смотри в [16], страница 16, [17], страница 111, [12], страница 51 (Кон называет такое представление точным).

морфизм представлений. В этом случае мы можем отождествить морфизм (id, R) *представлений* Ω_1*-алгебры и соответствующий гомоморфизм* R Ω_2*-алгебры и будем называть гомоморфизм* R **приведенным морфизмом представлений**. *Мы будем пользоваться диаграммой*

(2.3)
$$
\begin{tikzcd}
& A_2 \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "f(a)"'] & B_2 \arrow[d, "g(a)"] \\
& A_2 \arrow[r, "r_2"'] & B_2 \\
A_1 \arrow[uur, Rightarrow, "f"] \arrow[uurr, Rightarrow, "g"] & &
\end{tikzcd}
$$

для представления приведенного морфизма R *представлений* Ω_1*-алгебры. Из диаграммы следует*

$$r_2 \circ f(a) = g(a) \circ r_2 \tag{2.4}$$

Мы будем также пользоваться диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[rr, "r_2"] & & B_2 \\
& A_1 \arrow[ul, "f"', "*"] \arrow[ur, "g", "*"'] &
\end{tikzcd}
$$

вместо диаграммы (2.3). □

2.3. Модуль над коммутативным кольцом.

Определение 2.15. *Пусть коммутативное кольцо* D *имеет единицу* 1. *Эффективное представление*

$$f : D \xrightarrow{*} V \qquad f(d) : v \to d\,v \tag{2.5}$$

кольца D *в абелевой группе* V *называется* **модулем над кольцом** D *или* D**-модулем**. *Эффективное представление* (2.5) *поля* D *в абелевой группе* V *называется* **векторным пространством над полем** D *или* D**-векторным пространством**. □

Теорема 2.16. *Элементы* D*-модуля* V *удовлетворяют соотношениям*

- **закону ассоциативности**

$$(ab)m = a(bm) \tag{2.6}$$

- **закону дистрибутивности**

$$a(m+n) = am + an \tag{2.7}$$

$$(a+b)m = am + bm \tag{2.8}$$

- **закону унитарности**

$$1m = m \tag{2.9}$$

для любых $a, b \in D$, $m, n \in V$.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-4.1.3. □

Определение 2.17. *Пусть A_1, A_2 - D-модули. Приведенный морфизм представлений*

$$f : A_1 \to A_2$$

D-модуля A_1 в D-модуль A_2 называется **линейным отображением** *D-модуля A_1 в D-модуль A_2. Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ множество линейных отображений D-модуля A_1 в D-модуль A_2.* □

Теорема 2.18. *Линейное отображение*

$$f : A_1 \to A_2$$

D-модуля A_1 в D-модуль A_2 удовлетворяет равенствам[7]

$$f \circ (a + b) = f \circ a + f \circ b \tag{2.10}$$

$$f \circ (pa) = p(f \circ a) \tag{2.11}$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-4.2.2. □

Определение 2.19. *Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, ..., A_n, S - D-модули. Мы будем называть отображение*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to S$$

полилинейным отображением *модулей A_1, ..., A_n в модуль S, если*

$$f \circ (a_1, ..., a_i + b_i, ..., a_n) = f \circ (a_1, ..., a_i, ..., a_n) + f \circ (a_1, ..., b_i, ..., a_n)$$
$$f \circ (a_1, ..., pa_i, ..., a_n) = pf \circ (a_1, ..., a_i, ..., a_n)$$

$$1 \le i \le n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

□

Определение 2.20. *Пусть A_1, ..., A_n - свободные модули над коммутативным кольцом D.*[8] *Рассмотрим категорию $\mathcal{A}_1$ объектами которой являются полилинейные отображения*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \longrightarrow S_1 \qquad g : A_1 \times ... \times A_n \longrightarrow S_2$$

где S_1, S_2 - модули над кольцом D. Мы определим морфизм

$$f \to g$$

как линейное отображение

$$h : S_1 \to S_2$$

---

[7] В некоторых книгах (например, [1], с. 94) теорема 2.18 рассматривается как определение.

[8] Я определяю тензорное произведение D-модулей по аналогии с определением в [1], с. 456 - 458.

такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dd, "h"] \\ A_1 \times ... \times A_n \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "g"'] & \\ & S_2 \end{tikzcd}$$

Универсальный объект $A_1 \otimes ... \otimes A_n$ *категории* $\mathcal{A}_1$ *называется* **тензорным произведением** *модулей* $A_1, ..., A_n$. □

Теорема 2.21. *Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть $A_1, ..., A_n$ - D-модули. Тензорное произведение дистрибутивно относительно сложения*

$$\begin{aligned} & a_1 \otimes ... \otimes (a_i + b_i) \otimes ... \otimes a_n \\ = & a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes ... \otimes a_n + a_1 \otimes ... \otimes b_i \otimes ... \otimes a_n \\ & a_i, b_i \in A_i \end{aligned} \tag{2.12}$$

Представление кольца D в тензорном произведении определено равенством

$$\begin{aligned} & a_1 \otimes ... \otimes (ca_i) \otimes ... \otimes a_n = c(a_1 \otimes ... \otimes a_i \otimes ... \otimes a_n) \\ & a_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned} \tag{2.13}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-4.4.3. □

Теорема 2.22. *Пусть $A_1, ..., A_n$ - модули над коммутативным кольцом D. Тензорное произведение*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to A_1 \otimes ... \otimes A_n$$

существует и единственно. Мы пользуемся обозначением

$$f \circ (a_1, ..., a_n) = a_1 \otimes ... \otimes a_n$$

для образа отображения f. Пусть

$$g : A_1 \times ... \times A_n \to V$$

полилинейное отображение в D-модуль V. Существует линейное отображение

$$h : A_1 \otimes ... \otimes A_n \to V$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_1 \otimes ... \otimes A_n \arrow[dd, "h"] \\ A_1 \times ... \times A_n \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "g"'] & \\ & V \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

коммутативна. Отображение h определено равенством

$$h \circ (a_1 \otimes ... \otimes a_n) = g \circ (a_1, ..., a_n) \tag{2.15}$$

Доказательство. Смотри доказательство теорем [7]-4.4.2, [7]-4.4.4. □

2.4. **Алгебра над коммутативным кольцом.**

Определение 2.23. *Пусть D - коммутативное кольцо. D-модуль A_1 называется* **алгеброй над кольцом** *D или* **D-алгеброй***, если определена операция произведения*[9] *в A_1*

$$v\,w = C \circ (v, w) \tag{2.16}$$

где C - билинейное отображение

$$C : A \times A \to A$$

Если A_1 является свободным D-модулем, то A_1 называется **свободной алгеброй над кольцом** *D.* □

Теорема 2.24. *Произведение в алгебре A_1 дистрибутивно по отношению к сложению.*

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-5.1.2. □

Соглашение 2.25. *Элемент D-алгебры A называется* **A-числом***. Например, комплексное число также называется C-числом, а кватернион называется H-числом.* □

Произведение в алгебре может быть ни коммутативным, ни ассоциативным. Следующие определения основаны на определениях, данных в [18], страница 13.

Определение 2.26. Коммутатор

$$[a, b] = ab - ba$$

служит мерой коммутативности в D-алгебре A_1. D-алгебра A_1 называется **коммутативной***, если*

$$[a, b] = 0$$

□

Определение 2.27. Ассоциатор

$$(a, b, c) = (ab)c - a(bc) \tag{2.17}$$

служит мерой ассоциативности в D-алгебре A_1. D-алгебра A_1 называется **ассоциативной***, если*

$$(a, b, c) = 0$$

□

Определение 2.28. Ядро D-алгебры *A_1 - это множество*[10]

$$N(A) = \{a \in A : \forall b, c \in A, (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a) = 0\}$$

□

Определение 2.29. Центр D-алгебры *A_1 - это множество*[11]

$$Z(A) = \{a \in A : a \in N(A), \forall b \in A, ab = ba\}$$

□

---

[9] Я следую определению, приведенному в [18], с. 1, [10], с. 4. Утверждение, верное для произвольного D-модуля, верно также для D-алгебры.

[10] Определение дано на базе аналогичного определения в [18], с. 13

[11] Определение дано на базе аналогичного определения в [18], с. 14

Соглашение 2.30. *Пусть A - свободная алгебра с конечным или счётным базисом. При разложении элемента алгебры A относительно базиса $\overline{\overline{e}}$ мы пользуемся одной и той же корневой буквой для обозначения этого элемента и его координат. В выражении a^2 не ясно - это компонента разложения элемента a относительно базиса или это операция возведения в степень. Для облегчения чтения текста мы будем индекс элемента алгебры выделять цветом. Например,*

$$a = a^i e_i$$

□

Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис свободной алгебры A_1 над кольцом D. Если алгебра A_1 имеет единицу, положим e_0 - единица алгебры A_1.

Теорема 2.31. *Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис свободной алгебры A_1 над кольцом D. Пусть*

$$a = a^i e_i \quad b = b^i e_i \quad a, b \in A$$

Произведение a, b можно получить согласно правилу

$$(ab)^k = C^k_{ij} a^i b^j \tag{2.18}$$

где C^k_{ij} - **структурные константы** *алгебры A_1 над кольцом D. Произведение базисных векторов в алгебре A_1 определено согласно правилу*

$$e_i e_j = C^k_{ij} e_k \tag{2.19}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-5.1.9. □

Определение 2.32. *Пусть A_1 и A_2 - алгебры над кольцом D. Линейное отображение D-модуля A_1 в D-модуль A_2 называется* **линейным отображением** *D-алгебры A_1 в D-алгебру A_2. Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ множество линейных отображений D-алгебры A_1 в D-алгебру A_2.* □

Определение 2.33. *Пусть A_1, ..., A_n, S - D-алгебры. Мы будем называть полилинейное отображение*

$$f : A_1 \times ... \times A_n \to S$$

D-модулей A_1, ..., A_n в D-модуль S **полилинейным отображением** *D-алгебр A_1, ..., A_n в D-модуль S. Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1, ..., A_n; S)$ множество полилинейных отображений D-алгебр A_1, ..., A_n в D-алгебру S. Обозначим $\mathcal{L}(D; A^n; S)$ множество n-линейных отображений D-алгебры A_1 ($A_1 = ... = A_n = A_1$) в D-алгебру S.* □

Теорема 2.34. *Тензорное произведение $A_1 \otimes ... \otimes A_n$ D-алгебр A_1, ..., A_n является D-алгеброй.*

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-6.1.3. □

Теорема 2.35. *Пусть A_1 ассоциативная D-алгебра. Представление*

$$h : A \otimes A \xrightarrow{*} \mathcal{L}(D; A; A) \qquad h(p) : f \to p \circ f \tag{2.20}$$

D-модуля $A_1 \otimes A_1$ определено равенством

$$(a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A; A) \tag{2.21}$$

Представление (2.20) *порождает произведение* $\circ$ *в* D*-модуле* $A_1\otimes A_1$ *согласно правилу*

$$(p\circ q)\circ a=p\circ(q\circ a)$$

$$(p_0\otimes p_1)\circ(q_0\otimes q_1)=(p_0q_0)\otimes(q_1p_1) \tag{2.22}$$

Представление (2.20) *алгебры* $A_1\otimes A_1$ *в модуле* $\mathcal{L}(D;A;A)$ *позволяет отождествить тензор* $d\in A_1\otimes A_1$ *с линейным отображением* $d\circ\delta\in\mathcal{L}(D;A;A)$, *где* $\delta\in\mathcal{L}(D;A;A)$ *- тождественное отображение. Линейное отображение, порождённое тензором* $a\otimes b\in A_1\otimes A_1$, *имеет вид*

$$(a\otimes b)\circ c=acb \tag{2.23}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-6.3.4. □

Соглашение 2.36. *В выражении вида*

$$a_{i\cdot 0}xa_{i\cdot 1}$$

предполагается сумма по индексу i. □

Теорема 2.37. *Рассмотрим* D*-алгебру* A_1 *и ассоциативную* D*-алгебру* A_2. *Рассмотрим представление алгебры* $A_2\otimes A_2$ *в модуле* $\mathcal{L}(D;A_1;A_2)$. *Отображение*

$$h:A_1\to A_2$$

порождённое отображением

$$f:A_1\to A_2$$

имеет вид

$$h=(a_{s\cdot 0}\otimes a_{s\cdot 1})\circ f=a_{s\cdot 0}fa_{s\cdot 1} \tag{2.24}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-6.3.6. □

Теорема 2.38. *Пусть* A_1 *- алгебра над кольцом* D. *Пусть* A_2 *- свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом* D. *Пусть* $\overline{\overline{e}}$ *- базис алгебры* A_2 *над кольцом* D. *Отображение*

$$g=a\circ f \tag{2.25}$$

порождённое отображением $f\in\mathcal{L}(D;A_1;A_2)$ *посредством тензора* $a\in A_2\otimes A_2$, *имеет стандартное представление*

$$g=a^{ij}(e_i\otimes e_j)\circ f=a^{ij}e_ife_j \tag{2.26}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-6.4.1. □

Соглашение 2.39. *В равенстве*

$$\begin{aligned}&((a_0,...,a_n,\sigma)\circ(f_1,...,f_n))\circ(x_1,...,x_n)\\ =\ &(a_0\sigma(f_1)a_1...a_{n-1}\sigma(f_n)a_n)\circ(x_1,...,x_n)\\ =\ &a_0\sigma(f_1\circ x_1)a_1...a_{n-1}\sigma(f_n\circ x_n)a_n\end{aligned} \tag{2.27}$$

также как и в других выражениях полилинейного отображения, принято соглашение, что отображение f_i *имеет своим аргументом переменную* x_i. □

Теорема 2.40. *Пусть A - ассоциативная D-алгебра. Полилинейное отображение*

$$f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, ..., a_n) \tag{2.28}$$

порождённое отображениями $I_{s\cdot 1}, \ ..., \ I_{s\cdot n} \in \mathcal{L}(D; A; A)$ *, имеет вид*

$$a = f^n_{s\cdot 0} \ \sigma_s(I_{s\cdot 1} \circ a_1) \ f^n_{s\cdot 1} \ ... \ \sigma_s(I_{s\cdot n} \circ a_n) \ f^n_{s\cdot n} \tag{2.29}$$

где σ_s - перестановка множества переменных $\{a_1, ..., a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & ... & a_n \\ \sigma_s(a_1) & ... & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [7]-6.6.6. □

Соглашение 2.41. *Если тензор* $a \in A^{\otimes(n+1)}$ *имеет разложение*

$$a = a_{i\cdot 0} \otimes a_{i\cdot 1} \otimes ... \otimes a_{i\cdot n} \quad i \in I$$

то множество перестановок $\sigma = \{\sigma_i \in S(n) : i \in I\}$ *и тензор a порождают отображение*

$$(a, \sigma) : A^{\times n} \rightarrow A$$

определённое равенством

$$\begin{aligned}(a, \sigma) \circ (b_1, ..., b_n) &= (a_{i\cdot 0} \otimes a_{i\cdot 1} \otimes ... \otimes a_{i\cdot n}, \sigma_i) \circ (b_1, ..., b_n) \\ &= a_{i\cdot 0}\sigma_i(b_1)a_{i\cdot 1}...\sigma_i(b_n)a_{i\cdot n}\end{aligned}$$

□

2.5. **Алгебра с сопряжением.** Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A - D-алгебра с единицей e, $A \neq D$.

Пусть существует подалгебра F алгебры A такая, что $F \neq A$, $D \subseteq F \subseteq Z(A)$, и алгебра A является свободным модулем над кольцом F. Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис свободного модуля A над кольцом F. Мы будем полагать $e_0 = 1$.

Теорема 2.42. *Структурные константы D-алгебры с единицей e удовлетворяют условию*

$$C^l_{0k} = C^l_{k0} = \delta^k_l \tag{2.30}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [5]-3.5. □

Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned}\mathrm{Re} &: A \rightarrow A \\ \mathrm{Im} &: A \rightarrow A\end{aligned}$$

определенные равенством

$$\mathrm{Re}\, d = d^0 \quad \mathrm{Im}\, d = d - d^0 \quad d \in D \quad d = d^i e_i \tag{2.31}$$

Выражение $\mathrm{Re}\, d$ называется **скаляром элемента** d. Выражение $\mathrm{Im}\, d$ называется **вектором элемента** d.

Согласно (2.31)

$$F = \{d \in A : \mathrm{Re}\, d = d\}$$

Мы будем пользоваться записью $\mathrm{Re}\, A$ для обозначения **алгебры скаляров алгебры** A.

Теорема 2.43. *Множество*

$$\mathrm{Im}\,A = \{d \in A : \mathrm{Re}\,d = 0\} \tag{2.32}$$

является $(\mathrm{Re}\,A)$*-модулем, который мы называем* **модуль векторов алгебры** A.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [5]-4.1. □

Согласно теореме 2.43, однозначно определенно представление

$$d = \mathrm{Re}\,d + \mathrm{Im}\,d \tag{2.33}$$

Определение 2.44. *Отображение*

$$d^* = \mathrm{Re}\,d - \mathrm{Im}\,d \tag{2.34}$$

называется **сопряжением в алгебре** *при условии, если это отображение удовлетворяет равенству*

$$(cd)^* = d^*\,c^* \tag{2.35}$$

$(\mathrm{Re}\,A)$*-алгебра* A*, в которой определено сопряжение, называется* **алгеброй с сопряжением**. □

Теорема 2.45. $(\mathrm{Re}\,A)$*-алгебра* A *является алгеброй с сопряжением тогда и только тогда, когда структурные константы* $(\mathrm{Re}\,A)$*-алгебры* A *удовлетворяют условию*

$$C^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{kl}} = C^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{lk}} \quad C^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{kl}} = -C^{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{lk}} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{1} \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n} \quad \mathbf{1} \le \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{n} \quad \mathbf{1} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{n}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [5]-4.5. □

2.6. **Многочлен над ассоциативной D-алгеброй.** Пусть D - коммутативное кольцо и A - ассоциативная D-алгебра с единицей.

Теорема 2.46. *Пусть* $p_k(x)$ - **одночлен степени** k *над* D*-алгеброй* A*. Тогда*

2.46.1: *Одночлен степени* 0 *имеет вид* $p_0(x) = a_0$, $a_0 \in A$.

2.46.2: *Если* $k > 0$, *то*

$$p_k(x) = p_{k-1}(x)xa_k$$

где $a_k \in A$.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [6]-4.1. □

В частности, одночлен степени 1 имеет вид $p_1(x) = a_0xa_1$.

Определение 2.47. *Обозначим* $A_k[x]$ *абелевую группу, порождённую множеством одночленов степени* k*. Элемент* $p_k(x)$ *абелевой группы* $A_k[x]$ *называется* **однородным многочленом степени** k. □

Соглашение 2.48. *Пусть тензор* $a \in A^{\otimes(n+1)}$*. Если* $x_1 = ... = x_n = x$*, то мы положим*

$$a \circ x^n = a \circ (x_1 \otimes ... \otimes x_n)$$

□

Теорема 2.49. *Однородный многочлен $p(x)$ может быть записан в виде*

$$p(x) = a_k \circ x^k \quad a_k \in A^{\otimes(k+1)}$$

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [6]-4.6. □

Определение 2.50. *Обозначим*

$$A[x] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n[x]$$

прямую сумму[12] *A-модулей $A_n[x]$. Элемент $p(x)$ A-модуля $A[x]$ называется* **многочленом** *над D-алгеброй A.* □

Определение 2.51. *Многочлен $p(x)$ называется* **делителем многочлена** *$r(x)$, если мы можем представить многочлен $r(x)$ в виде*

$$r(x) = q_{i\cdot 0}(x)p(x)q_{i\cdot 1}(x) = (q_{i\cdot 0}(x) \otimes q_{i\cdot 1}(x)) \circ p(x) \tag{2.37}$$

□

Теорема 2.52. *Пусть $p(x) = p_1 \circ x$ - однородный многочлен степени 1 и p_1 - невырожденный тензор. Пусть*

$$r(x) = r_0 + r_1 \circ x + ... + r_k \circ x^k$$

многочлен степени k. Тогда

$$\begin{aligned} r(x) &= r_0 + q_{1\cdot 0}p(x)q_{1\cdot 1} + q_{2\cdot 0}(x)p(x)q_{2\cdot 1} + ... + q_{k\cdot 0}(x)p(x)q_{k\cdot 1} \\ &= r_0 + (q_{1\cdot 0} \otimes q_{1\cdot 1}) \circ p(x) + (q_{2\cdot 0}(x) \otimes q_{2\cdot 1}) \circ p(x) \\ &+ ... + (q_{k\cdot 0}(x) \otimes q_{k\cdot 1}) \circ p(x) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Теорема 2.53. *Пусть*

$$p(x) = p_0 + p_1 \circ x \tag{2.39}$$

- многочлен степени 1 и p_1 - невырожденный тензор. Пусть

$$r(x) = r_0 + r_1 \circ x + ... + r_k \circ x^k$$

многочлен степени k. Тогда

$$\begin{aligned} r(x) = r_0 &- ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\ &- (((r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\ &- ... - (((r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\ &+ ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\ &+ (((r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\ &+ ... + (((r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \\ &= r_0 - ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s} + (r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s} \\ &+ ... + (r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p_0 \\ &+ ((r_{1\cdot 0\cdot s} \otimes r_{1\cdot 1\cdot s} + (r_{2\cdot 0\cdot s} \circ x) \otimes r_{2\cdot 1\cdot s} \\ &+ ... + (r_{k\cdot 0\cdot s} \circ x^{k-1}) \otimes r_{k\cdot 1\cdot s}) \circ p_1^{-1}) \circ p(x) \end{aligned} \tag{2.40}$$

[12] Смотри определение прямой суммы модулей в [1], страница 98. Согласно теореме 1 на той же странице, прямая сумма модулей существует.

2.7. Алгебра кватернионов.

Определение 2.54. *Пусть R - поле действительных чисел. Расширение $H = R(i,j,k)$ поля R называется* **алгеброй кватернионов**, *если произведение в алгебре H определено согласно правилам*

(2.41)
$$\begin{array}{c|ccc} & i & j & k \\ \hline i & -1 & k & -j \\ j & -k & -1 & i \\ k & j & -i & -1 \end{array}$$

□

Элементы алгебры H имеют вид

$$x = x^0 + x^1 i + x^2 j + x^3 k$$
$$x^0, x^1, x^2, x^3 \in R$$

Кватернион

$$\overline{x} = x^0 - x^1 i - x^2 j - x^3 k \tag{2.42}$$

называется сопряжённым кватерниону x. Мы определим **норму кватерниона** x равенством

$$|x|^2 = x\overline{x} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{2.43}$$

Из равенства (2.43) следует, что обратный элемент имеет вид

$$x^{-1} = |x|^{-2}\overline{x} \tag{2.44}$$

Теорема 2.55. *Положим*

$$e_0 = 1 \quad e_1 = i \quad e_2 = j \quad e_3 = k \tag{2.45}$$

базис алгебры кватернионов H. Тогда в базисе (2.45) структурные константы имеют вид

$$\begin{array}{llll} C^0_{00} = 1 & C^1_{01} = \ \ 1 & C^2_{02} = \ \ 1 & C^3_{03} = \ \ 1 \\ C^1_{10} = 1 & C^0_{11} = -1 & C^3_{12} = \ \ 1 & C^2_{13} = -1 \\ C^2_{20} = 1 & C^3_{21} = -1 & C^0_{22} = -1 & C^1_{23} = \ \ 1 \\ C^3_{30} = 1 & C^2_{31} = \ \ 1 & C^1_{32} = -1 & C^0_{33} = -1 \end{array} \tag{2.46}$$

Доказательство. Смотри доказательство теоремы [4]-4.3.1. □

Теорема 2.56. *Уравнение*

$$ax - xa = 1$$

в алгебре кватернионов не имеет решений.

Доказательство. Теорема является следствием теоремы [3]-7.1. □

3. Простые примеры

Теорема 3.1.

$$(x+a)^2 = x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^2 \tag{3.1}$$

Доказательство. Тождество (3.1) является следствием равенства

$$\begin{aligned}(x+a)(x+a) &= x(x+a) + a(x+a) = x^2 + xa + ax + a^2\\ &= x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^2\end{aligned}$$

□

Теорема 3.2.

$$\begin{aligned}(x+a)^3 = x^3 &+ (1\otimes 1\otimes a + 1\otimes a\otimes 1 + a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2\\ &+ (1\otimes a^2 + a\otimes a + a^2\otimes 1)\circ x + a^3\end{aligned} \tag{3.2}$$

Доказательство. Равенство

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+a)(x+a) = (x+a)(x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^2)\\ &= x(x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^2) + a(x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^2)\\ &= x^3 + x(1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + xa^2 + ax^2 + a(1\otimes a + a\otimes 1)\circ x + a^3\\ &= x^3 + (1\otimes 1\otimes a + 1\otimes a\otimes 1)\circ x^2 + (1\otimes a^2)\circ x\\ &+ (a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2 + (a\otimes a + a^2\otimes 1)\circ x + a^3\\ &= x^3 + (1\otimes 1\otimes a + 1\otimes a\otimes 1 + a\otimes 1\otimes 1)\circ x^2\\ &+ (1\otimes a^2 + a\otimes a + a^2\otimes 1)\circ x + a^3\end{aligned} \tag{3.3}$$

является следствием тождества (3.1). Тождество (3.2) является следствием равенства (3.3). □

Теорема 3.3.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a\otimes 1 + 1\otimes b)\circ x + ab \tag{3.4}$$

$$(x+a)(x+b) + (x+b)(x+a) = 2x^2 + ((a+b)\otimes 1 + 1\otimes(a+b))\circ x + ab + ba \tag{3.5}$$

Доказательство. Тождество (3.4) является следствием равенства

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) = x^2 + xb + ax + ab$$

Тождество (3.5) является следствием равенства

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) + (x+b)(x+a) &= x(x+b) + a(x+b) + x(x+a) + b(x+a)\\ &= 2x^2 + xb + ax + ab + xa + bx + ba\end{aligned}$$

□

Теорема 3.4.

$$\begin{aligned}&(c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2}, \sigma_s)\circ(x+a, x+b)\\ &= (c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2}, \sigma_s)\circ x^2\\ &+ (c_{s\cdot 0}\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2} + c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\sigma_s(b)c_{s\cdot 2})\circ x + c_{s\cdot 0}\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(b)c_{s\cdot 2}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство. Тождество (3.6) является следствием равенства

$$\begin{aligned}&(c_{s\cdot 0}\otimes c_{s\cdot 1}\otimes c_{s\cdot 2},\sigma_s)\circ(x+a,x+b)\\ =&c_{s\cdot 0}\sigma_s(x+a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(x+b)c_{s\cdot 2}\\ =&c_{s\cdot 0}(x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}(x+\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\\ =&c_{s\cdot 0}((x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}x+(x+\sigma_s(a))c_{s\cdot 1}\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\\ =&c_{s\cdot 0}(xc_{s\cdot 1}x+\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}x+xc_{s\cdot 1}\sigma_s(b)+\sigma_s(a)c_{s\cdot 1}\sigma_s(b))c_{s\cdot 2}\end{aligned}$$

□

4. Квадратный корень

Определение 4.1. *Решение* $x=\sqrt{a}$ *уравнения*

$$x^2=a \tag{4.1}$$

в D-алгебре A называется **квадратным корнем** *A-числа a.* □

В алгебре кватернионов уравнение

$$x^2=-1$$

имеет по крайней мере 3 корня $x=i$, $x=j$, $x=k$. Наша задача - ответить на вопрос как много корней имеет уравнение (4.1).

Теорема 4.2. *Корни уравнения*[13]

$$(a+x)^2=a^2 \tag{4.2}$$

удовлетворяют уравнению

$$x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x=0 \tag{4.3}$$

Доказательство. Уравнение (4.3) является следствием (3.1), (4.2). □

Теорема 4.3.

$$x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x=x\left(\frac12 x+a\right)+\left(\frac12 x+a\right)x \tag{4.4}$$

Доказательство. Тождество (4.4) следует из равенства

$$\begin{aligned}x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x&=\frac12 x^2+xa+\frac12 x^2+ax\\ &=x\left(\frac12 x+a\right)+\left(\frac12 x+a\right)x\end{aligned}$$

□

Следствие 4.4. *Уравнение*

$$x^2+(1\otimes a+a\otimes 1)\circ x=0 \tag{4.5}$$

имеет корни $x=0$, $x=-2a$. □

Теорема 4.5. $x=j-i$ *является корнем уравнения*

$$x^2+(1\otimes i+i\otimes 1)\circ x=0 \tag{4.6}$$

[13] Мы обозначаем x разность между 2 квадратными корнями.

Доказательство. Согласно теореме 4.3, уравнение (4.6) равносильно уравнению

$$x\left(\frac{1}{2}x+i\right)+\left(\frac{1}{2}x+i\right)x=0 \tag{4.7}$$

Из уравнения (4.7) следует, что

$$\begin{aligned}&(j-i)((j-i)+2i)+((j-i)+2i)(j-i)\\=&(j-i)(j+i)+(j+i)(j-i)\\=&(j-i)j+(j-i)i+(j+i)(j-i)\\=&j^2-ij+ji-i^2+j^2+ij-ji-i^2\\=&0\end{aligned}$$

□

Возникает вопрос. Как много корней имеет уравнение (4.6). Из уравнения

$$x(x+2a)+(x+2a)x=0 \tag{4.8}$$

следует, что

$$x(x+2a)=-(x+2a)x \tag{4.9}$$

Из равентва (4.9) следует, что произведение A-чисел $2a+x$, x антикоммутативно.

Теорема 4.6. *Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис конечно мерной ассоциативной D-алгебры A. Пусть C^{i}_{kl} - структурные константы D-алгебры A относительно базиса $\overline{\overline{e}}$. Тогда*

$$C^{i}_{kl}(x^{k}x^{l}+x^{k}a^{l}+a^{k}x^{l})=0 \tag{4.10}$$

Доказательство. Равентво (4.10) следует из равентва (4.8). □

Теорема 4.7. *В алгебре кватернионов, если $a=i$, то уравнение (4.10) имеет множество решений таких, что*

$$x^{0}=0\quad -(x^{1})^2-2x^{1}=(x^{2})^2+(x^{3})^2 \tag{4.11}$$

$$-2\le x^{1}\le 0 \tag{4.12}$$

Доказательство. Если $a=i$, то равенство (4.10) имеет вид

$$C^{i}_{kl}x^{k}x^{l}+C^{i}_{k1}x^{k}+C^{i}_{1k}x^{k}=0$$

$$\begin{aligned}&C^{0}_{kl}x^{k}x^{l}+C^{0}_{k1}x^{k}+C^{0}_{1k}x^{k}=0\\&C^{1}_{kl}x^{k}x^{l}+C^{1}_{k1}x^{k}+C^{1}_{1k}x^{k}=0\\&C^{2}_{kl}x^{k}x^{l}+C^{2}_{k1}x^{k}+C^{2}_{1k}x^{k}=0\\&C^{3}_{kl}x^{k}x^{l}+C^{3}_{k1}x^{k}+C^{3}_{1k}x^{k}=0\end{aligned} \tag{4.13}$$

Согласно теореме 2.55, из (2.46), (4.13) следует, что

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2-2x^1=0 \tag{4.14}$$

$$2x^0x^1+2x^0=0 \tag{4.15}$$

$$2x^0x^2+x^3-x^3=0 \tag{4.16}$$

$$2x^0x^3-x^2+x^2=0 \tag{4.17}$$

Из уравнения (4.15) следует, что либо $x^0=0$, либо $x^1=-1$. Если $x^0=0$, то равенство (4.11) является следствием равенства (4.14). Утверждение (4.12) является следствием требования

$$-(x^1)^2-2x^1\ge 0$$

Если $x^1=-1$, то либо $x^0=0$, либо $x^2=x^3=0$. Утверждение $x^0=0$, $x^1=-1$ является частным случаем утверждения теоремы. Утверждение $x^1=-1$, $x^2=x^3=0$ неверно, так как равенство (4.14) принимает вид

$$(x^0)^2+1=0$$

□

Теорема 4.8. *В алгебре кватернионов, если* $a=1$*, то уравнение* (4.10) *имеет* 2 *корня*

$$\begin{aligned}
&x^0=0 \quad x^1=0 \quad x^2=0 \quad x^3=0\\
&x^0=-2 \quad x^1=0 \quad x^2=0 \quad x^3=0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Доказательство. Если $a=1$, то равенство (4.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
C^i_{kl}x^kx^l+C^i_{k0}x^k+C^i_{0k}x^k&=0\\
C^0_{kl}x^kx^l+C^0_{k0}x^k+C^0_{0k}x^k&=0\\
C^1_{kl}x^kx^l+C^1_{k0}x^k+C^1_{0k}x^k&=0\\
C^2_{kl}x^kx^l+C^2_{k0}x^k+C^2_{0k}x^k&=0\\
C^3_{kl}x^kx^l+C^3_{k0}x^k+C^3_{0k}x^k&=0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Из (2.46), (4.19) следует, что

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2+2x^0=0 \tag{4.20}$$

$$2x^0x^1+2x^1=0 \tag{4.21}$$

$$2x^0x^2+2x^2=0 \tag{4.22}$$

$$2x^0x^3+2x^3=0 \tag{4.23}$$

Из уравнений (4.21), (4.22), (4.23) следует, что либо

$$x^1=x^2=x^3=0 \tag{4.24}$$

либо $x^0=-1$.

Если равенство (4.24) верно, то из уравнения (4.20) следует, что либо $x^0=0$, либо $x^0=-2$. Следовательно, мы получили решения (4.18).

Если $x^0=-1$, то равенство (4.20) имеет вид

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+1=0 \tag{4.25}$$

Уравнение (4.25) не имеет действительных корней. □

Теорема 4.9.

$$b^2 - a^2 = \frac{1}{2}(b-a)(b+a) + \frac{1}{2}(b+a)(b-a) \tag{4.26}$$

Доказательство. Из тождества (3.1) следует, что

$$(x+a)^2 - a^2 = x^2 + (1\otimes a + a\otimes 1)\circ x \tag{4.27}$$

Из (4.4), (4.27) следует, что

$$(x+a)^2 - a^2 = x\left(\frac{1}{2}x + a\right) + \left(\frac{1}{2}x + a\right)x \tag{4.28}$$

Пусть $b = x + a$. Тогда

$$x = b - a \tag{4.29}$$

Из (4.28), (4.29) следует, что

$$b^2 - a^2 = (b-a)\left(\frac{1}{2}(b-a) + a\right) + \left(\frac{1}{2}(b-a) + a\right)(b-a) \tag{4.30}$$

Тождество (4.26) является следствием равенства (4.30). □

5. Алгебра с сопряжением

Согласно теореме 4.7, уравнение

$$x^2 = -1$$

в алгебре кватернионов имеет бесконечно много корней. Согласно теореме 4.8, уравнение

$$x^2 = 1$$

в алгебре кватернионов имеет 2 корня. Я не ожидал столь различные утверждения. Однако, где корень этого различия?

Пусть $\overline{\overline{e}}$ - базис конечно мерной D-алгебры A. Пусть C^{i}_{kl} - структурные константы D-алгебры A относительно базиса $\overline{\overline{e}}$. Тогда уравнение

$$x^2 = a$$

имеет вид

$$C^{i}_{kl}x^k x^l = a^i \tag{5.1}$$

относительно базиса $\overline{\overline{e}}$. Решение системы уравнений (5.1) - не самая простая задача.

Однако решение этой задачи возможно, если алгебра A имеет единицу и является алгеброй с сопряжением. Согласно теоремам 2.42, 2.45, структурные константы D-алгебры A имеют следующий вид

$$C^{0}_{00} = 1 \quad C^{0}_{kl} = \quad C^{0}_{lk} \tag{5.2}$$

$$C^{k}_{k0} = C^{k}_{0k} = 1 \quad C^{p}_{kl} = -C^{p}_{lk} \tag{5.3}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n \quad 1 \le p \le n$$

Теорема 5.1. *В D-алгебре A с сопряжением уравнение (5.1) имеет вид*

$$(x^0)^2 + C^0_{kl}x^k x^l = a^0 \tag{5.4}$$

$$2x^0 x^p = a^p \tag{5.5}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n \quad 1 \le p \le n$$

Доказательство. Уравнение (5.4) является следствием (5.1), (5.2) когда $i = 0$. Уравнение (5.5) является следствием (5.1), (5.3) когда $i > 0$. □

Теорема 5.2. *Если* $\sqrt{a} \in \operatorname{Im} A$, *то* $a \in \operatorname{Re} A$. *Корень уравнения*

$$x^2 = a$$

удовлетворяет уравнению

$$C^0_{kl}x^k x^l = a^0 \tag{5.6}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n$$

Доказательство. Если $x \in \operatorname{Im} A$, то

$$x^0 = 0 \tag{5.7}$$

Равенство

$$a^p = 0 \quad 1 \le p \le n \tag{5.8}$$

является следствием (5.5), (5.7). Из равенства (5.8) следует, что $a \in \operatorname{Re} A$. Уравнение (5.6) является следствием (5.4), (5.7). □

Теорема 5.2 ничего не говорит о числе корней. Однако следующее утверждение очевидно.

Следствие 5.3. *В алгебре кватернионов, если* $a \in R$, $a < 0$, *то уравнение*

$$x^2 = a$$

имеет бесконечно много корней. □

Теорема 5.4. *Если* $\operatorname{Re}\sqrt{a} \ne 0$, *то корни уравнения*

$$x^2 = a$$

удовлетворяют равенству

$$(x^0)^4 - a^0(x^0)^2 + \frac{1}{4}C^0_{kl}a^k a^l = 0 \tag{5.9}$$

$$x^k = \frac{a^k}{2x^0} \tag{5.10}$$

$$1 \le k \le n \quad 1 \le l \le n$$

Доказательство. Так как $x^0 \ne 0$, то равенство (5.10) является следствием равенства (5.5). Равенство

$$(x^0)^2 + C^0_{kl}\frac{a^k a^l}{4(x^0)^2} = a^0 \tag{5.11}$$

является следствием равенств (5.4), (5.10). Равенство (5.9) является следствием равенства (5.11). □

Теорема 5.5. *Пусть H - алгебра кватернионов и a - H-число.*

5.5.1: *Если* $\mathrm{Re}\sqrt{a}\ne 0$, *то уравнение*

$$x^2=a$$

имеет корни $x=x_1$, $x=x_2$ *такие, что*

$$x_2=-x_1 \tag{5.12}$$

5.5.2: *Если* $a=0$, *то уравнение*

$$x^2=a$$

имеет корень $x=0$ *кратности* 2.

5.5.3: *Если условия 5.5.1, 5.5.2 не верны, то уравнение*

$$x^2=a$$

имеет бесконечно много корней таких, что

$$x\in\mathrm{Im}\,H\quad a\in\mathrm{Re}\,H\quad |x|=\sqrt{-a} \tag{5.13}$$

Доказательство. Уравнение

$$(x^{\mathbf{0}})^2-(x^{\mathbf{1}})^2-(x^{\mathbf{2}})^2-(x^{\mathbf{3}})^2=a^{\mathbf{0}} \tag{5.14}$$

является следствием (2.46), (5.4).

Если $a=0$, то уравнение

$$(x^{\mathbf{0}})^2-(x^{\mathbf{1}})^2-(x^{\mathbf{2}})^2-(x^{\mathbf{3}})^2=0 \tag{5.15}$$

является следствием уравнения (5.14). Из (5.5) следует, что либо $x^{\mathbf{0}}=0$, либо $x^{\mathbf{1}}=x^{\mathbf{2}}=x^{\mathbf{3}}=0$. В обоих случаях, утверждение 5.5.2 следует из уравнения (5.15).

Если $\mathrm{Re}\sqrt{a}\ne 0$, то мы можем применить теорему 5.4 к уравнению (5.14). Следовательно, мы получим уравнение

$$(x^{\mathbf{0}})^4-a^{\mathbf{0}}(x^{\mathbf{0}})^2-\frac{1}{4}((a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2)=0 \tag{5.16}$$

которое является квадратным уравнением

$$y^2-a^{\mathbf{0}}y-\frac{1}{4}((a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2)=0 \tag{5.17}$$

относительно

$$y=(x^{\mathbf{0}})^2 \tag{5.18}$$

Так как

$$(a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2\ge 0$$

то мы должны рассмотреть два варианта.

- Если

$$(a^{\mathbf{1}})^2+(a^{\mathbf{2}})^2+(a^{\mathbf{3}})^2>0$$

то, согласно теореме Виета, уравнение (5.17) имеет корни $y=y_1$, $y_1<0$, и $y=y_2$, $y_2>0$. Согласно равенству (5.18), мы рассматриваем только корень $y=y_2$, $y_2>0$. Следовательно, уравнение (5.16) имеет два корня

$$x_1^{\mathbf{0}}=\sqrt{y_2}\qquad x_2^{\mathbf{0}}=-\sqrt{y_2} \tag{5.19}$$

Равенство (5.12) является следствием равенств (5.10), (5.19).

- Если
$$(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2=0$$
то
$$a^1=a^2=a^3=0 \tag{5.20}$$
Так как $\operatorname{Re}\sqrt{a}\ne 0$, то утверждение
$$x^1=x^2=x^3=0 \tag{5.21}$$
является следствием (5.10), (5.20). Следовательно, уравнение (5.17) имеет вид
$$y^2-a^0y=0 \tag{5.22}$$
Согласно доказательству теоремы 5.4, значение $y=0$ является посторониим корнем. Следовательно, уравнение (5.22) эквивалентно уравнению
$$y-a^0=0 \tag{5.23}$$
Пусть[14] $a^0>0$. Из уравнений (5.18), (5.23) следует, что уравнение (5.16) имеет два корня
$$x_1^0=\sqrt{a^0} \qquad x_2^0=-\sqrt{a^0} \tag{5.24}$$
Равенство (5.12) является следствием равенств (5.10), (5.24).

Если условия 5.5.1, 5.5.2 не верны, то $a\ne 0$, однако $\operatorname{Re}\sqrt{a}=0$. Согласно теореме 5.2, $a\in\operatorname{Re}A$, $a^0\ne 0$ и уравнение
$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=-a^0 \tag{5.25}$$
является следствием уравнения (5.6) и равенства (2.46). Пусть[15] $a^0<0$. Тогда уравнение (5.25) имеет бесконечно много корней, удовлетворяющих условию (5.13). □

6. Несколько замечаний

Я был готов к утверждению, что уравнение
$$x^2=a$$
имеет бесконечно много корней. Однако утверждение теоремы 5.5 оказалось более неожиданным. Число корней в алгебре кватернионов H зависит от значения H-числа a.

Квадратный корень в поле комплексных чисел C имеет два значения. Мы пользуемся римановой поверхностью[16] RC для представления отображения
$$\sqrt{\ }: z\in C\to\sqrt{z}\in RC$$
Я полагаю, что похожую поверхность мы можем рассматривать в алгебре кватернионов. Однако подобная поверхность имеет более сложную топологию.

---

[14] Мы рассмотрели значение $a^0=0$ в утверждении 5.5.2. Мы рассмотрели значение $a^0<0$ в утверждении 5.5.3.

[15] Мы рассмотрели значение $a^0>0$ в утверждении 5.5.1.

[16] Определение римановой поверхности смотри в [15], страницы 170, 171.

Математики изучали теорию некоммутативных полиномов на протяжении XX века, и знание полученных результатов важно для продолжения исследования.

В книге [13], на странице 48, Пол Кон пишет, что изучение многочленов над некоммутативной алгеброй A - задача непростая. Чтобы сделать задачу проще и получить некоторые предварительные результаты, Пол Кон предложил рассматривать многочлены, у которых коэффициенты являются A-числами и записаны справа. Таким образом, согласно Кону, многочлен над D-алгеброй A имеет вид

$$p(x) = a_0 + xa_1 + ... + x^n a_n \quad a_i \in A$$

Это соглашение позволило преодолеть трудности, связанные с некоммутативностью, и получить интересные утверждения о многочленах. Однако, вообще говоря, не все утверждения верны.

Мы рассмотрим следующий пример. В книге [14], страница 262, Цит Лам рассматривает многочлены, у которых коэффициенты являются A-числами и записаны слева.[17] Согласно Цит Ламу, произведение многочленов имеет вид

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab \tag{6.1}$$

Произведение (6.1) многочленов не согласовано с произведением в D-алгебре A.

Хотя мы можем рассматривать равенство (6.1) как обобщение теоремы Виета,[18] Цит Лам обращает наше внимание на утверждение, что A-число a не является корнем многочлена f. По-видимому, это одна из причин, почему понятия левого, правого и псевдо корней рассмотренны в [2, 14].

Мой путь в теорию некоммутативных многочленов проходит через математический анализ (раздел [8]-4.2). У кого-то путь может проходить через физику. Я полагаю, что математическая операция должна быть согласована с требованиями других теорий. Развитие новых идей и методов позволяет продвинуться в изучении некоммутативных многочленов. Цель этой статьи - показать, какими возможностями мы располагаем сегодня для изучения некоммутативных полиномов.

7. Вопросы и ответы

В этом разделе я собрал вопросы, на которые необходимо ответить для изучения некоммутативных многочленов. Мы сконцентрируем наше внимание на **квадратном уравнении**

$$(a_{s\cdot 0} \otimes a_{s\cdot 1} \otimes a_{s\cdot 2}) \circ x^2 + (b_{t\cdot 0} \otimes b_{t\cdot 1}) \circ x + c = 0 \tag{7.1}$$

на теореме Виета и методе выделения полного квадрата.

Пусть $r(x)$ - многочлен степени 2. Согласно определению 2.51, многочлен

$$p(x) = x - a = (1 \otimes 1) \circ x - a$$

[17] Различие в формате записи многочлена, предложенном Коном и Ламом, непринципиально.

[18] В утверждении [2]-1.1, Владимир Ретах рассмотрел другую формулировку теоремы Виета для многочленов над некоммутативной алгеброй.

является делителем многочлена $r(x)$, если существуют многочлены $q_{i\cdot 0}(x)$, $q_{i\cdot 1}(x)$ такие, что

$$r(x) = q_{i\cdot 0}(x)p(x)q_{i\cdot 1}(x) \tag{7.2}$$

Согласно теореме 2.52, для каждого i, степень одного из многочленов $q_{i\cdot 0}(x)$, $q_{i\cdot 1}(x)$ равна 1, а другой многочлен является A-числом. Если многочлен r имеет также корень b, можем ли мы представить многочлен r в виде произведения многочленов $x-a$, $x-b$. В каком порядке мы должны перемножать многочлены $x-a$, $x-b$? Учитывая симметрию корней a и b, я ожидаю что разложение многочлена $p(x)$ на множители имеет вид

$$r(x) = (c, \sigma) \circ (x-a, x-b) = (c_{s\cdot 0} \otimes c_{s\cdot 1} \otimes c_{s\cdot 2}, \sigma_s) \circ (x-a, x-b) \tag{7.3}$$

Вопрос 7.1. *Пусть либо $a \notin Z(A)$, $b \notin Z(A)$, либо $a \notin Z(A)$, $c \notin Z(A)$. Пусть многочлен $p(x)$ имеет вид*

$$p(x) = (x-b)(x-a) + (x-a)(x-c) \tag{7.4}$$

7.1.1: *Является ли значение $x = a$ единственным корнем многочлена $p(x)$ или существует ещё один корень многочлена $p(x)$?*

7.1.2: *Существует ли представление многочлена $p(x)$ в виде (7.3).*

□

Пусть $a, b \in Z(A)$. Тогда

$$(x-b)(x-a) = x^2 - bx - xa + ba = x^2 - xb - ax + ab = (x-a)(x-b)$$

и мы можем упростить выражение многочлена (7.4)

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-b)(x-a) + (x-a)(x-c) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) \\ &= (x-a)(2x-b-c) \end{aligned}$$

Ответ очевиден. Поэтому мы будем полагать либо $a \notin Z(A)$, $b \notin Z(A)$, либо $a \notin Z(A)$, $c \notin Z(A)$.

Из построений, рассмотренных в разделе 1.2, следует, что квадратное уравнение может иметь 1 корень. Сейчас я готов привести ещё один пример квадратного уравнения, которое имеет 1 корень.

Теорема 7.2. *В алгебре кватернионов существует квадратное уравнение, которое имеет 1 корень.*

Доказательство. Согласно теореме 2.56, многочлен

$$p(x) = jx - xj - 1$$

не имеет корней в алгебре кватернионов. Следовательно, многочлен

$$p(x)(x-i) = (jx - xj - 1)(x-i) = jx^2 - xjx - x - jxi - xk + i$$

имеет 1 корень. □

Теорема 7.3. *В алгебре кватернионов существует квадратное уравнение, которое не имеет 1 корней.*

Доказательство. Согласно теореме 2.56, многочлены

$$p(x) = jx - xj - 1$$
$$q(x) = kx - xk - 1$$

не имеют корней в алгебре кватернионов. Следовательно, многочлен

$$\begin{aligned}p(x)q(x) &= (jx - xj - 1)(kx - xk - 1)\\ &= (jx - xj - 1)kx - (jx - xj - 1)xk + jx - xj - 1\\ &= jxkx - xjkx - kx - jxxk + xjxk + xk + jx - xj - 1\\ &= jxkx - jx^2k + xjxk - xix - kx + xk + jx - xj - 1\end{aligned}$$

не имеет корней. □

Вопрос 7.4. *Существуют ли неприводимые многочлены степени выше чем 2? Какова структура множества неприводимых многочленов?* □

Вопрос 7.5. *Зависит ли множество корней многочлена (7.3) от тензора a и множества перестановок σ?* □

Вопрос 7.6. *Для любого тензора $b_{i\cdot 0} \otimes b_{i\cdot 1} \in A \otimes A$, существует ли A-число a такое, что*

$$1 \otimes a + a \otimes 1 = b_{i\cdot 0} \otimes b_{i\cdot 1} \tag{7.5}$$

□

Допустим, ответ на вопрос 7.6 положителен. Тогда, опираясь на тождество (3.1), мы можем применить метод выделения полного квадрата для решения **приведенного квадратного уравнения**

$$x^2 + (p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1}) \circ x + q = 0$$

Есть все основания полагать, что ответ на вопрос 7.6 отрицателен.

Множество многочленов (7.3) слишком велико, чтобы рассматривать теорему Виета. Теорема Виета предполагает приведенное квадратное уравнение. Следовательно, чтобы рассмотреть теорему Виета, мы должны рассмотреть многочлены, у которых коэффициент при x^2 равен $1 \otimes 1 \otimes 1$. Самая простая форма таких многочленов имеет вид

$$c(x - x_1)(x - x_2) + d(x - x_2)(x - x_1) = 0 \tag{7.6}$$

где c, d - любые A-числа такие, что

$$c + d = 1$$

Теорема 7.7 (Франсуа Виет)**.** *Если квадратное уравнение*

$$x^2 + (p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1}) \circ x + q = 0 \tag{7.7}$$

имеет корни $x = x_1$, $x = x_2$, то существуют A-числа c, d,

$$c + d = 1$$

такие, что одно из следующих утверждений верно

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1} &= -((cx_1) \otimes 1 + c \otimes x_2 + (dx_2) \otimes 1 + d \otimes x_1)\\ q &= cx_1x_2 + dx_2x_1\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1} &= -((x_1c) \otimes 1 + 1 \otimes (cx_2) + (x_2d) \otimes 1 + 1 \otimes (dx_1))\\ q &= x_1cx_2 + x_2dx_1\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}p_{s\cdot 0} \otimes p_{s\cdot 1} &= -(x_1 \otimes c + 1 \otimes (x_2c) + x_2 \otimes d + 1 \otimes (x_1d))\\ q &= x_1x_2c + x_2x_1d\end{aligned} \tag{7.10}$$

Доказательство. Утверждение (7.8) является следствием равенства

$$\begin{aligned}&c(x-x_1)(x-x_2)+d(x-x_2)(x-x_1)\\=&c(x-x_1)x-c(x-x_1)x_2+d(x-x_2)x-d(x-x_2)x_1\\=&cx^2-cx_1x-cxx_2+cx_1x_2+dx^2-dx_2x-dxx_1+dx_2x_1\\=&x^2-cx_1x-cxx_2-dx_2x-dxx_1+cx_1x_2+dx_2x_1\end{aligned}\tag{7.11}$$

Утверждение (7.9) является следствием равенства

$$\begin{aligned}&(x-x_1)c(x-x_2)+(x-x_2)d(x-x_1)\\=&(x-x_1)cx-(x-x_1)cx_2+(x-x_2)dx-(x-x_2)dx_1\\=&xcx-x_1cx-xcx_2+x_1cx_2+xdx-x_2dx-xdx_1+x_2dx_1\\=&x^2-x_1cx-xcx_2-x_2dx-xdx_1+x_1cx_2+x_2dx_1\end{aligned}\tag{7.12}$$

Утверждение (7.10) является следствием равенства

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)c+(x-x_2)(x-x_1)d\\=&(x-x_1)xc-(x-x_1)x_2c+(x-x_2)xd-(x-x_2)x_1d\\=&x^2c-x_1xc-xx_2c+x_1x_2c+x^2d-x_2xd-xx_1d+x_2x_1d\\=&x^2-x_1xc-xx_2c-x_2xd-xx_1d+x_1x_2c+x_2x_1d\end{aligned}\tag{7.13}$$

□

Вопрос 7.8. *Перечислены ли в теореме 7.7 все возможные представления приведенного уравнения (7.7)?* □

Мы можем рассмотреть вопрос 7.1 с точки зрения теоремы 7.7. Предположим, что многочлен

$$p(x)=(x-b)(x-a)+(x-a)(x-c)\tag{7.14}$$

имеет корни $x=a$, $x=d$. Существуют A-числа f, g,

$$f+g=1$$

такие, что

$$2afd+2dga=ba+ac\tag{7.15}$$

Мы получили уравнение степени 2 с двумя неизвестными.

Вопрос 7.9. *Пусть $x=x_3$ корень многочлена (7.3). Если мы запишем значение x_3 вместо значения x_2, изменится ли полином $p(x)$.* □

Значения $x=i$, $x=-i$ порождают многочлен

$$\begin{aligned}p(x)&=(x-i)(x+i)+(x+i)(x-i)\\&=x(x+i)-i(x+i)+(x+i)x-(x+i)i\\&=x^2+xi-ix-i^2+x^2+ix-xi-i^2\\&=2x^2+2\end{aligned}\tag{7.16}$$

Значения $x = i$, $x = -j$ порождают многочлен

$$
\begin{aligned}
q(x) &= (x-i)(x+j) + (x+j)(x-i)\\
&= x(x+j) - i(x+j) + (x+j)x - (x+j)i\\
&= x^2 + xj - ix - ij + x^2 + jx - xi - ji\\
&= 2x^2 + x(j-i) + (j-i)x
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Как мы видим, многочлены $p(x)$, $q(x)$ различны. Более того

$$
\begin{aligned}
q(-i) &= 2(-i)^2 + (-i)(j-i) + (j-i)(-i)\\
&= 2(-1) + (-i)j - (-i)i + j(-i) - i(-i)\\
&= -2 - ij + i^2 - ji + i^2 = -2 + 2i^2 = -4
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

8. Список литературы

[1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968

[2] Vladimir Retakh, From factorizations of noncommutative polynomials to combinatorial topology,
eprint arXiv:0911.4454 (2009)

[3] Александр Клейн, Линейное уравнение в конечномерной алгебре,
eprint arXiv:0912.4061 (2010)

[4] Александр Клейн, Линейные отображения свободной алгебры,
eprint arXiv:1003.1544 (2010)

[5] Александр Клейн, Алгебра с сопряжением,
eprint arXiv:1105.4307 (2011)

[6] Александр Клейн, Многочлен над ассоциативной D-алгеброй,
eprint arXiv:1302.7204 (2013)

[7] Александр Клейн, Линейное отображение D-алгебры,
eprint arXiv:1502.04063 (2015)

[8] Александр Клейн, Введение в математический анализ над банаховой алгеброй,
eprint arXiv:1601.03259 (2016)

[9] Rida T. Farouki, Graziano Gentili, Carlotta Giannelli, Alessandra Sestini, Caterina Stoppato,
Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients,
eprint arXiv:1506.05848 (2015)

[10] John C. Baez, The Octonions,
eprint arXiv:math.RA/0105155 (2002)

[11] П. Кон, Универсальная алгебра, М., Мир, 1968

[12] Paul M. Cohn, Algebra, Volume 1, John Wiley & Sons, 1982

[13] Paul M. Cohn, Skew Fields, Cambridge University Press, 1995

[14] T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Verlag, 1991

[15] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М. Наука, 1969

[16] Постников М. М., Лекции по геометрии, семестр IV, Дифференциальная геометрия, М. Наука, 1983

[17] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В., Основные понятия дифференциальной геометрии

Итоги ВИНИТИ 28
М. ВИНИТИ, 1988
[18] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1995

9. Предметный указатель

A-число 10
A-представление в Ω-алгебре 5

D-алгебра 10
D-модуль 7
D-векторное пространство 7

n-арная операция на множестве 4

алгебра кватернионов 16
алгебра над кольцом 10
алгебра с сопряжением 14
алгебра скаляров алгебры 13
арность 5
ассоциативная D-алгебра 10
ассоциатор D-алгебры 10

вектор элемента алгебры 13
векторное пространство над полем 7

гомоморфизм 5

декартова степень 4
делитель многочлена 15

закон ассоциативности 7
закон дистрибутивности 7
закон унитарности 7

квадратное уравнение 25
квадратный корень 18
коммутативная D-алгебра 10
коммутатор D-алгебры 10

линейное отображение 8, 11

многочлен 15
модуль векторов алгебры 14
модуль над кольцом 7
морфизм представлений Ω_1-алгебры в Ω_2-алгебре 6
морфизм представлений из f в g 6
морфизм представления f 6

норма кватерниона 16
носитель Ω-алгебры 5

область операторов 5
однородный многочлен степени n 14
одночлен степени k 14
операция на множестве 4

полилинейное отображение 8, 11
представление Ω_1-алгебры A в Ω_2-алгебре M 5
преобразование универсальной алгебры 5
приведенное квадратное уравнение 27
приведенный морфизм представлений 7

свободная алгебра над кольцом 10
скаляр элемента алгебры 13
сопряжение в алгебре 14
структурные константы 11

тензорное произведение 9

универсальная алгебра 5

центр D-алгебры A 10

эндоморфизм 5
эффективное представление Ω-алгебры 6

ядро D-алгебры A 10

Ω-алгебра 5

10. Специальные символы и обозначения

$A[x]$ A-алгебра многочленов над D-алгеброй A 15
(a, b, c) ассоциатор D-алгебры 10
$[a, b]$ коммутатор D-алгебры 10

$A_k[x]$ A-модуль однородных многочленов над D-алгеброй A 14
A_Ω Ω-алгебра 5
$\sqrt{a}$ квадратный корень 18

B^A декартова степень 4

C_{ij}^k структурные константы 11

d^* сопряжение в алгебре 14

H алгебра кватернионов 16

$\mathrm{Im}\, A$ модуль векторов алгебры A 14
$\mathrm{Im}\, d$ вектор элемента d алгебры 13

$\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ множество линейных отображений 8, 11
$\mathcal{L}(D; A_1, ..., A_n; S)$ множество полилинейных отображений 11
$\mathcal{L}(D; A^n; S)$ множество n-линейных отображений 11

$\mathrm{End}(\Omega_2; A_2)$ множество преобразований универсальной алгебры M 5

$N(A)$ ядро D-алгебры A 10

$A_1 \otimes ... \otimes A_n$ тензорное произведение 9

$\mathrm{Re}\, A$ алгебра скаляров алгебры A 13
$\mathrm{Re}\, d$ скаляр элемента d алгебры 13

$Z(A)$ центр D-алгебры A 10

Ω область операторов 5
$\Omega(n)$ множество n-арных операторов 5